Probabilités et Statistiques

Loi normale et convergences

Pr. Hamza El Mahjour

Tanger, March 18, 2025

Outline

normale $\rightarrow$ centrée/réduite

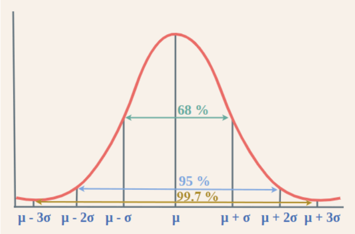
Théorème

Soit X *une v.a.r normale telle que* $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *alors* $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ *suit une loi normale* **centrée réduite**.

normale $\to$ centrée/réduite

Théorème

Soit X une v.a.r normale telle que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit une loi normale **centrée réduite**.

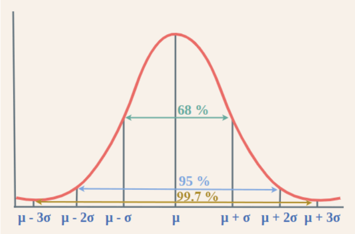


$\longrightarrow$

normale $\to$ centrée/réduite

Théorème

Soit X une v.a.r normale telle que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit une loi normale **centrée réduite**.



$\longrightarrow$

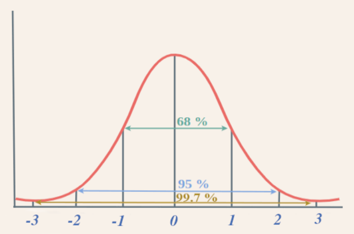


Tableau de la loi normale

En pratique, comme on l'a déjà dit, on utilisera le tableau de la loi normale (Z-score Table) suivant:

z	.00	.01	.02	.03	.04
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995

Soit $X \sim \mathcal{N}(12, 0.5)$. On veut trouver le z-score de la valeur $x = 12.17$. On trouve

$$z_x = \frac{12.17 - 12}{0.5} = 0.34 =$$

Donc $\mathbb{P}(\{X \leq 12.17\}) = 0.6331$

Tableau de la loi normale

En pratique, comme on l'a déjà dit, on utilisera le tableau de la loi normale (Z-score Table) suivant:

z	.00	.01	.02	.03	.04
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995

Soit $X \sim \mathcal{N}(12, 0.5)$. On veut trouver le z-score de la valeur $x = 12.17$. On trouve

$$z_x = \frac{12.17 - 12}{0.5} = 0.34 = 0.3 + 0.04$$

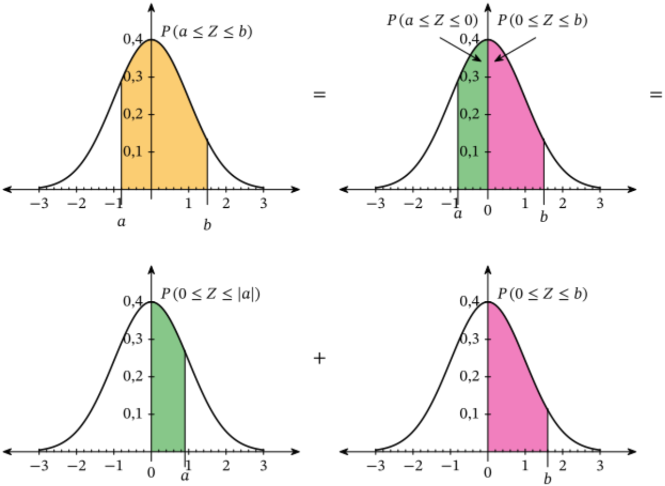
Donc $\mathbb{P}(\{X \leq 12.17\}) = 0.6331$

cas à connaître

Il y a plusieurs cas de calculs qui se résument aux suivants:

cas à connaître

Il y a plusieurs cas de calculs qui se résument aux suivants:



Exemple pratique

Les durées de vie des gorilles dans un zoo particulier suivent une distribution normale. La durée de vie moyenne d'un gorille est de 20.8 ans, l'écart-type est de 3.1 ans. Calculer à chaque fois la probabilité qu'un gorille

- vive moins de 13.05 ans?
- vive plus de 25.915 ans?
- vive entre 17.1 et 23.9 ans?

Outline

Processus Aléatoires

Introduction

On peut définir des suites de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand chaque X_n représente une v.a.r définie sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exemple

On répète une infinité un lancer d'une pièce de monnaie et on y associe une loi de Bernoulli. On obtient ainsi une suite de v.a.r $X_i = 0$ *ou* 1 *pour chaque* i.

On peut appeler une telle suite un *processus aléatoire discret*.

v.a.r i.i.d

Une suite de v.a.r est dite i.i.d si elles sont deux à deux indépendantes et identiquement distribuées (suivent la même loi $\rightarrow$) même fonction de répartition.

Example

Lancer consécutive d'un dé en associant à chaque lancer une variable aléatoire qui prend la valeur affiché par le dé.

Un autre exemple

Exemple

On lance un dé successivement jusqu'à l'obtention de six. Si le six est obtenu on attribue la valeur 0 *à tout* X_n *après l'obtention de six. Dans ce cas là les variables ne sont pas indépendantes.*

Processus Aléatoires

Types de convergence

Comme dans le cas d'une suite de fonctions ou d'une suite numérique, on se pose la question sur le comportement à long terme d'une suite de v.a.r
On mentionne d'abord une inégalité importante à retenir

Théorème (Inégalité de Bienaymé-Chebyshev)

Soit X une v.a.r admettant une espérance $\mathbb{E}[X]$ et de variance σ^2 (l'hypothèse de variance finie garantie l'existence de l'espérance). Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Convergence en probabilité

On définit maintenant le premier type de convergence

Définition (Convergence en probabilité)

On considére une suite (X_n) de v.a.r et X une autre variable aléatoire définis sur le même espace probabilisé.
On dit que la suite (X_n) **converge en probabilité** *vers une constante réelle l si*

$$\forall \epsilon > 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - l) > \epsilon) = 0.$$

On dit que la suite (X_n) **converge en probabilité** *vers X si*

$$\forall \epsilon > 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X) > \epsilon) = 0.$$

Pour que $X_n \to X$ en proba. il faut et il suffit que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n - X] = 0$ et $\lim_{n\to\infty} \mathbf{var}(X_n - X) = 0$. (utiliser l'inégalité de Bienaymé-Chebyshev).

Exemple de la loi binomiale

....

Voici une caractérisation importante

Théorème

Soit (X_n) *une suite de v.a.r vérifiant*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = l \qquad \textit{et} \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbf{var}(X) = 0$$

alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} l$.

Loi faible des grands nombres

Soit X_n une suite de v.a.r de même espérance l et de variances vérifiant $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 = 0$. Posons $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Donc

$$S_n/n \xrightarrow{\mathbb{P}} l$$

Loi faible des grands nombres

Soit X_n une suite de v.a.r de même espérance l et de variances vérifiant $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 = 0$. Posons $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Donc

$$S_n/n \xrightarrow{\mathbb{P}} l$$

Pour interpréter ce résultat, la loi faible des grands nombres stipule que pour tout ϵ positif, la probabilité que la moyenne empirique S_n/n s'éloigne de l'espérance d'au moins ϵ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Convergence en loi

Définition

Soient (X_n) *et* X *des v.a.r définies sur un même espace probabilisé, de fonctions de répartitions respectives* F_n *et* F. *On dit que* X_n **converge en loi** *et on note* $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ *su en tout point* x *où* F *est continue on a* $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$.

On admet les propriétés suivantes

Définition

Soient (X_n) et X des v.a.r définies sur un même espace probabilisé, de fonctions de répartitions respectives F_n et F. On dit que X_n **converge en loi** *et on note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ su en tout point x où F est continue on a $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$.*

On admet les propriétés suivantes

- La convergence en probabilité entraîne la convergence en loi.
- Dans le cas discret, $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ ssi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{X_n = x\} = \mathbb{P}(\{X = x\}))$$

Processus Aléatoires

Théorème Centrale Limite