TD n°1 : Probabilités

AP2 (S4) - 2024/2025
Pr. El Mahjour

Univers et événements

Exercice 1

Trouvez à chaque fois l'univers Ω cohérent avec l'expérience donnée.

1. Lancement d'une pièce de monnaie (Pile ou Face).
2. Lancement d'une pièce de monnaie trois fois consécutivement en marquant à chaque lancer le résultat affiché.
3. Lancement d'un dé (à six faces).
4. Lancement de deux dés simultanément.

[01]

Exercice 2

Soit l'ensemble $E = \{1,2,3,4,5\}$.

1. Quelles sont les tribus (σ-algèbres) grossière et exhaustive ?
2. Construisez deux $\sigma-$algèbres $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ telles que $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$
3. Montrer que l'intersection de deux tribus est toujours une tribu.

[02]

Exercice 3

Ali et Omar jouent à un jeu qui consiste à lancer un dé numéroté de 1 à 6. Le premier à obtenir "cinq" est le gagnant. On suppose que Ali commence. On considère les événement suivants :

- $A = \{\text{Ali est le gagnant}\}$
- $B = \{\text{Omar est le gagnant}\}$
- $D = \{\text{Pas de gagnant}\}$

Nous avons déjà vu en cours qu'on peut exprimer les événements précédents comme intersection/union infinis de deux événement moins complexes :

$$C_j = \{\text{Le j-ème lancer est cinq}\} \qquad F_n = \{\text{La partie se termine au n-ème lancer}\}$$

1. Rappelez comment nous avons exprimé A, B et D en fonction de C_j et F_n.
2. Exprimez F_n en fonction des C_j.
3. Montrer qu'on peut écrire A et B uniquement en fonction de C_j.

[03]

Un peu de dénombrement

Exercice 4

1. Une petite communauté est composé de 15 mères. Chaque mère a exactement 3 enfants. Si on organise une compétition pour choisir "Maman et son enfant de l'année". Combien y'a-t-il de résultats possibles ?
2. Une école d'ingénieurs dispose d'un comité de planification composé de 3 étudiants AP1, 4 AP2 , 5 juniors et deux seniors. Un sous-comité formé de 4 personnes, avec un seul représentant de chaque catégorie seulement va voir le jour. Combien de choix possibles pour ce sous-comité.
3. Les matricules marocaines des voitures sont formées de la manière suivante : NNNNN-L-R où N est un chiffre, L une lettre dans $\{A,B,C,D,E,F\}$ et R un nombre de 1 à 86. Combien de matricules peut on produire ?
4. Combien peut-on former d'applications f de $\{1,2,\ldots,n\}$ vers $\{0,1\}$?

[04]

Exercice 5

Un groupe dans une classe de "Théorie des probabilités" est formé de 6 hommes et 4 femmes. Ces étudiants passe un examen et obtiennent des notes deux à deux distinctes.

1. Quelle est la totalité des classements possibles ?
2. Si on suppose que les hommes sont classés à part et les femmes à part (dans le même classement de dix étudiants). Combien y'a t-il de manières différentes pour les classer.

[05]

Exercice 6

Le professeur Bookman veut ranger 10 livres sur une étagère de sa bibliothèque : 4 de mathématiques, 3 de chimie, 2 d'astronomie et un seul livre de langue. Si Bookman veut que les livres du même sujet soient collés l'un à l'autre. Combien a-t-il de choix pour y parvenir ? [06]

Exercice 7

La probabilité pour une population d'être atteinte d'une maladie A est p donné. Dans cette même population, un individu peut être atteint par une maladie B avec une probabilité q donnée aussi ; on suppose que les maladies sont indépendantes :

1. Quelle est la probabilité d'être atteint par l'une et l'autre de ces maladies ?
2. Quelle est la probabilité d'être atteint par l'une ou l'autre de ces maladies ?
3. Quelle est la probabilité d'être atteint par la maladie A sans d'être atteint par la maladie B ?
4. Quelle est la probabilité d'être atteint par une seule maladie ?

[07]