Analyse Mathématique : SEG - S1

Optimisation des fonctions numériques à plusieurs variables

Pr. Hamza El Mahjour

23 octobre 2022

Département des Mathématiques, FPL, Abdelmalek Essaadi University.

Faculté Polydisciplinaire de Larache

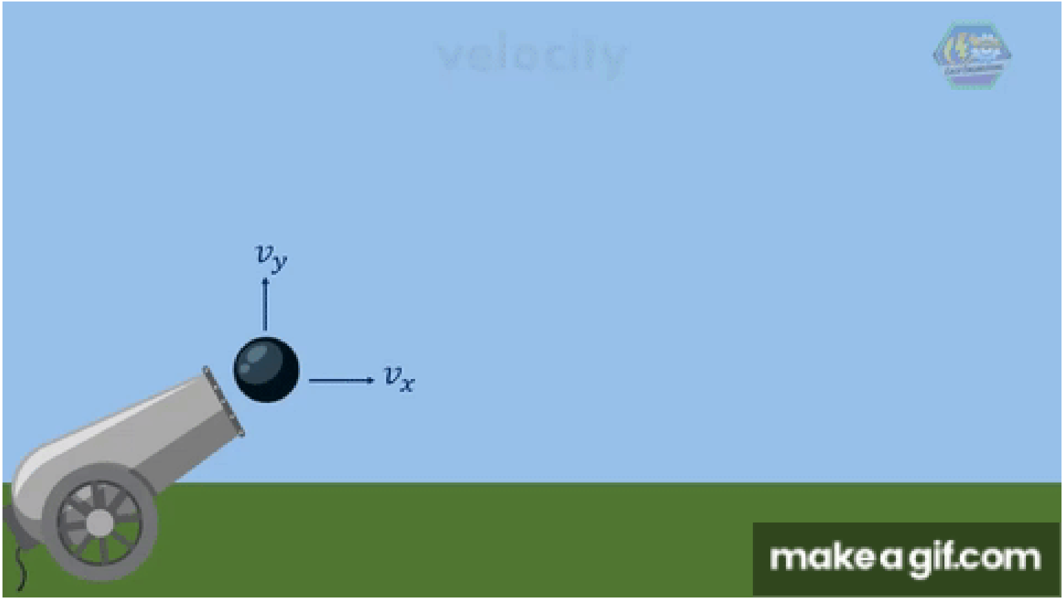
Université Abdelmael Essaâdi

Outline

Objectifs

- Connaître la définition d'un extremum
- Caractériser l'extremum d'une fonction $f(x)$
- Caractériser l'extremum d'une fonction $f(x, y)$
- Matrice Hessienne
- Méthode du lagrangien

Introduction


velocity
v_y
v_x
makeagif.com

Que représente la valeur maximale atteinte ?

Que représente la valeur maximale atteinte ?

C'est le point x^* vérifiant $\forall x \in D_f, \qquad f(x^*) > f(x)$.

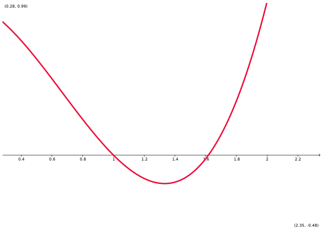
Que représente la valeur maximale atteinte ?

C'est le point x^* vérifiant $\forall x \in D_f, \qquad f(x^*) > f(x)$.

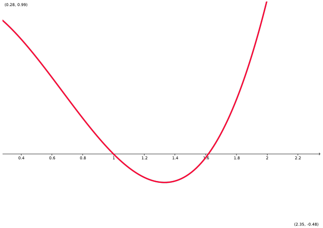
On a donc une **condition nécessaire**. Pour avoir un extremum x^* il faut que $f'(x^*) = 0$.

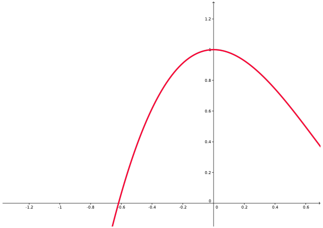
Est-ce que c'est l'image globale ?

Est-ce que c'est l'image globale ?

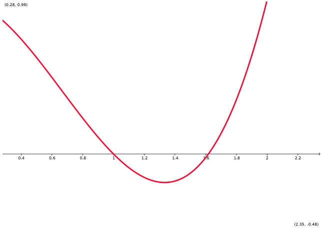


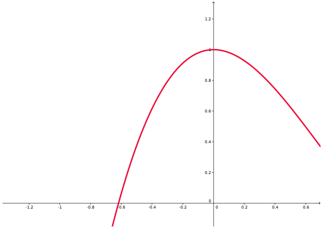
Est-ce que c'est l'image globale ?

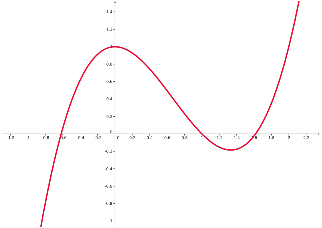




Est-ce que c'est l'image globale ?







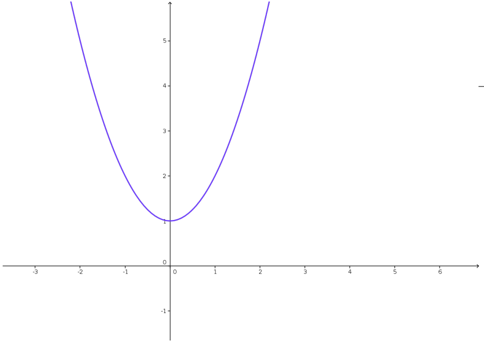
Qu'est ce qu'un extremum en général.

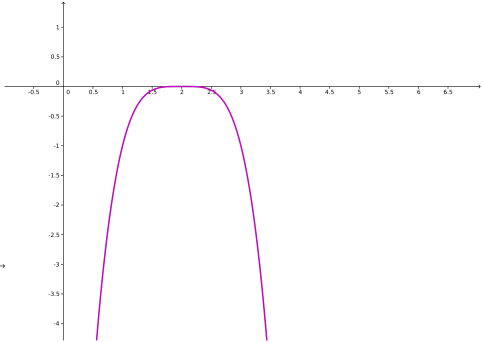
Definition (Extremum global)

Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit que x^* est un point de

1. **maximum global** ($f(x^*)$ est un maximum global) si $f(x^*)) \geq f(x)$ pour tout x dans D.
2. **minimum global** ($f(x^*)$ est un minimum global) si $f(x^*)) \leq f(x)$ pour tout x dans D.

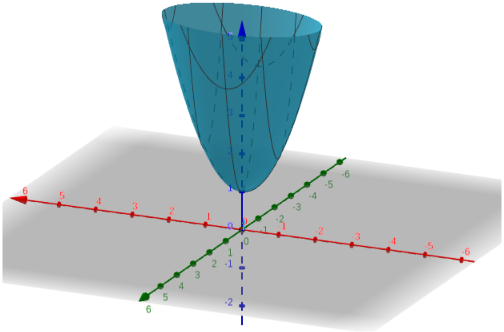
Exemple 1





À gauche, 0 est un point de minimum global et $f(0) = 1$ est un minimum global. À droite, 2 est un point de maximum global, et $g(2) = 0$ est un maximum global.

Exemple 2



$(0,0)$ est un point de minimum global et $f(0,0) = 1$ est un minimum global

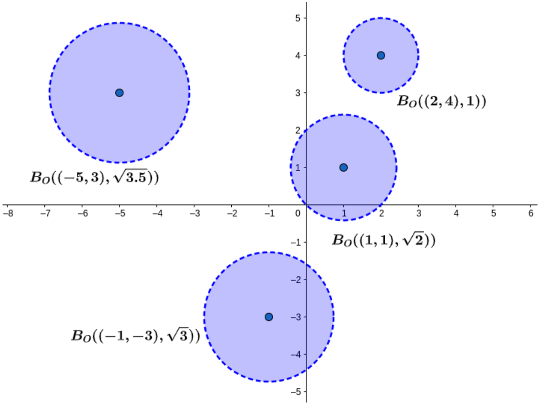
Comme on l'a déjà vu un point peut être minimum ou maximum mais juste sur une partie de $\mathbb{R}$. Plus généralement on a

Definition (Extrema local)

Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x^* \in D$. On dit que x^* est un point de minimum local x^* et que $f(x^*)$ est un minimum local de la fonction f s'il existe une boule $B_O(x^*, r) \subset D$ ouverte centrée autour de x^* et de rayon $r > 0$ tel que

$$f(x^*) \leq f(x), \qquad \forall x \in B_O(x^*, r)$$

Rappel topologique



$$B_o(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x - x_0\| \leq r\}\,.$$

Optimisation sans contrainte

On travaillera dorénavant sur $\mathbb{R}^2$

Definition (Point Critique)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur D et $E^* \in D$. On dit que $E^* = (x^*, y^*)$ est un point **critique** de f si $\nabla f_{(x^*,y^*)} = (0,0)$. (i.e $\frac{\partial f((x^*,y^*))}{\partial x} = \frac{\partial f(x^*,y^*)}{\partial y} = 0$)

Theorem (Condition nécessaire)

Si x^* est un extremum local alors c'est un point critique.

Attention : critique $\not\Longrightarrow$ extremum !

Exemples :

- Prenez $f(x) = x^3$ on a $f'(0) = 0$ mais $x^* = 0$ ni n'est un maximum, n'est un minimum.
- Considérons $g(x, y) = x^2 - y^2$. On a $\nabla_{(0,0)} g = (0, 0)$ mais $(0, 0)$ n'est pas un extremum. On l'appelle dans ce cas un **point selle**.

Definition (Hessienne)

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On appelle **hessienne** de f la matrice

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Definition

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ une matrice.

- On appelle trace de A la quantité $\mathbf{Tr}\,(A) = a_{11} + a_{22}$.
- On appelle déterminant de A la quantité $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Les conditions nécessaires pour qu'un point soit d'un extremum sont liées aux notions de

- Matrices définies positives,négatives
- Valeurs propres

Pour des raisons de simplification, et grâce à la nature de la matrice Hessienne qui est symétrique on peut résumer ces conditions dans ce qui suit.

Proposition

Soit $H_f(x,y)$ la matrice Hessienne de f définie sur $D \subset \mathbb{R}^2$ et $(x^*, y^*) \in D$.

1. Si $\det(H_f(x^*, y^*)) > 0$ et $\mathbf{Tr}\,(H_f(x^*, y^*)) > 0$ alors (x^*, y^*) est un **minimum** local.
2. Si $\det(H_f(x^*, y^*)) > 0$ et $\mathbf{Tr}\,(H_f(x^*, y^*)) < 0$ alors (x^*, y^*) est un **maximum** local.
3. Si $\det(H_f(x^*, y^*)) < 0$ alors (x^*, y^*) est un **point selle**.

- Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 3x^2 - y^2 + 1$.

1$^{\text{er}}$ étape. Vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. La fonction f est un polynôme sur $\mathbb{R}^2$ donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2$^{\text{ème}}$ étape. Chercher les points critiques de f.On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y,$$

donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ implique que $x = y = 0$.

3$^{\text{ème}}$ étape. Déterminer la nature des points critiques. On a

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Donc, $\det(H_f(0,0)) < 0$ c'est à dire que c'est un point selle.

Optimisation avec contraintes

On s'intéresse maintenant à une optimisation avec une exigence supplémentaire. Donc on a deux fonctions $f(x, y)$ et $g(x, y)$ où on cherche les extremums de f mais sur un domaine où $g(x, y) = 0$.

Definition (Lagrangien)

On appelle la fonction

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

le **Lagrangien** du problème d'optimisation.

Comment procéder pour résoudre le problème avec la méthode du Lagrangien ?

Comment procéder pour résoudre le problème avec la méthode du Lagrangien ?

1. On cherche les points critiques du Lagrangien

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}(x,y,\lambda}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x,y,\lambda}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x,y,\lambda}{\partial \lambda} = 0 (\iff g(x,y) = 0) \end{cases}$$

Comment procéder pour résoudre le problème avec la méthode du Lagrangien ?

1. On cherche les points critiques du Lagrangien

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}(x,y,\lambda}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x,y,\lambda}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x,y,\lambda}{\partial \lambda} = 0 (\iff g(x,y) = 0) \end{cases}$$

2. Trouvons la nature du point (x^*, y^*, λ^*) critique du Lagrangien (matrice hessienne).

Comment procéder pour résoudre le problème avec la méthode du Lagrangien ?

1. On cherche les points critiques du Lagrangien

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}(x,y,\lambda}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x,y,\lambda}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x,y,\lambda}{\partial \lambda} = 0 (\iff g(x,y) = 0) \end{cases}$$

2. Trouvons la nature du point (x^*, y^*, λ^*) critique du Lagrangien (matrice hessienne).
3. Le cas $\det H < 0$ ne nous permettra pas de conclure et nous pousse à faire plus de recherche.

Merci

Questions ?

Backup slides go here