# Analyse Mathématique : SEG - S1

## Optimisation des fonctions numériques à plusieurs variables - avec contraintes

Pr. Hamza El Mahjour

2 novembre 2023

Département des Mathématiques, FPL, Abdelmalek Essaadi University.

# Outline

1. Introduction

2. Sous contraintes d'égalité

# Introduction

Le problème de choix du consommateur peut être posé par l'économiste comme suit :

- maximiser l'utilité
- sous une contrainte de budget
- maximiser le profit
- sous la contrainte des prix imposés
- minimiser un coût

On Imagine le problème suivant.

Un consommateur qui a un montant de son salaire $m$ choisit combien il dépensera sur un bien $x$ dont le prix est $p$.

Et combien doit-il céder de son revenu pour dépenser un montant $y$ sur les autres biens ?

On Imagine le problème suivant.

Un consommateur qui a un montant de son salaire $m$ choisit combien il dépensera sur un bien $x$ dont le prix est $p$.

Et combien doit-il céder de son revenu pour dépenser un montant $y$ sur les autres biens ?

Le consommateur est confronté à un problème de contrainte budgétaire

$$px + y = m$$

Supposons que les préférences du consommateurs sont représentés par une fonction $u(x, y)$.

En termes mathématiques

$$\max \ u(x, y) \quad \textbf{sous la contrainte} \quad px + y = m$$

C'est un problème typique de maximisation sous contrainte.

Dans ce cas, puisque $y = m - px$.

Donc on peut le transformer en un problème à une seule dimension

$$h(x) = u(x, m - px)$$

C'est un problème typique de maximisation sous contrainte.

Dans ce cas, puisque $y = m - px$.

Donc on peut le transformer en un problème à une seule dimension

$$h(x) = u(x, m - px)$$

Malheureusement, si la fonction de « contrainte » est plus compliquée ... Cette idée ne marche pas !

C'est un problème typique de maximisation sous contrainte.

Dans ce cas, puisque $y = m - px$.

Donc on peut le transformer en un problème à une seule dimension

$$h(x) = u(x, m - px)$$

Malheureusement, si la fonction de « contrainte » est plus compliquée ... Cette idée ne marche pas !

On a besoin du **multplicateur de Lagrange**

# Sous contraintes d'égalité

Donc on part d'un problème de maximisation (minimisation) d'une fonction à deux variables $f(x, y)$ avec des contraintes sur les variables $x$ et $y$ qui doivent satisfaire une certaine égalité $g(x, y) = c$.

On exprimera le problème mathématiquement

$$\max f(x, y) \quad \text{sous la contrainte} \quad g(x, y) = c. \text{ (prob. maximisat°)}$$

$$\min f(x, y) \quad \text{sous la contrainte} \quad g(x, y) = c. \text{ (prob. maximisat°)}$$

La première étape va consister à introduire ce multiplicateur de Lagrange, noté généralement $\lambda$, associé à la contrainte $g(x, y) = c$. Alors on a le Lagrangien $\mathcal{L}$ qui est défini par

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda\big(g(x, y) - c\big)$$

Où l'expression $g(x, y) - c$ (qui doit être nulle quand la contrainte est satisfaite) est multiplié par $\lambda$.

Notons que $\mathcal{L}(x, y) = f(x, y)$ pour tout point $(x, y)$ qui vérifie la contrainte $g(x, y) = c$.

Notons aussi que les dérivées partielles de $\mathcal{L}$ par rapport à $x$ et $y$ sont

$$\begin{cases} \dfrac{\partial LL}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}, \\ \\ \dfrac{\partial LL}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}. \end{cases}$$

Il sera expliqué plus tard qu'il ne pourrait exister qu'un point où, pour une valeur adéquate de $\lambda$ les dérivées partielles premières doivent s'annuler et que la contrainte soit satisfaite.

# Attaquons un exemple !

Un consommateur dispose d'une fonction d'utilité $U(x, y) = xy$ et est soumis à une contrainte budgétaire $2x + y = 100$. Trouver l'unique solution au problème de demande du consommateur

$$\max U, \qquad 2x + y = 100.$$

# Solution

Le lagrangien est $\mathcal{L}(x, y) = xy - \lambda(2x + y - 100)$. En prenant en considération la contrainte, les deux dérivées partielles donnent $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = y - 2\lambda = 0$ et $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = x - \lambda = 0$, avec la contrainte $2x + y = 100$. On en déduit des deux premières égalités que $y = 2\lambda$ et $x = \lambda$. Donc, $y = 2x$ . En injectant ceci dans notre contrainte on trouve $2x + 2x = 100$ c-à-d $x = 25$.

## Procédure de résolution

Pour trouver l'unique solution du problème $\max(\min) u(x,y)$ sous contrainte $g(x,y)=c$, on respecte ce qui suit

1. Écrire l'expression du Lagrangien : $\mathcal{L}(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\big(g(x,y)-c\big)$
2. Trouver $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}$ et $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}$ et mettez les en égalité avec 0.
3. Les deux équations de l'étape 2) avec les contraintes engendrent les trois équations :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x}-\lambda\frac{\partial g}{\partial x}=0\\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y}-\lambda\frac{\partial g}{\partial y}=0\\ g(x,y) &= c\end{aligned}$$

4. résoudre le système des trois inconnus les solutions $(x,y,\lambda)$ candidates.