Analyse Mathématique - SEG

Calcul intégral - Partie 03 : Intégrales impropres

Pr. Hamza El Mahjour

Faculté
Polydisciplinaire
Larache
Université Abdelmalek Essaâdi

Objectifs

- Définir une intégrale impropre et sa convergence

- Intégrales impropres sur des domaines non bornés

- Le fondement théorique des tests : test de comparaison ...

Introduction

Qu’est ce qu’un intégrale impropre ?

L’intégrale $\int_a^b f(x)dx$ a un sens si :

- f est bornée sur $[a, b]$
- avec discontinuités finies
- sinon :
  - elle peut avoir un sens ...
  - ou être complètement chamboulée

Qu’est ce qu’un intégrale impropre ?

L’intégrale $\int_a^b f(x)dx$ a un sens si :

- f est bornée sur $[a, b]$
- avec discontinuités finies
- sinon :
  - elle peut avoir un sens ...
  - ou être complètement chamboulée

Que se passe t-il si f n’est même pas bornée ?

Qu'est ce qu'un intégrale impropre ?

L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ a un sens si :

- f est bornée sur $[a, b]$
- avec discontinuités finies
- sinon :
  - elle peut avoir un sens ...
  - ou être complètement chamboulée

Que se passe t-il si f n'est même pas bornée ?

C'est à dire sur $[a, b]$ il y a un point où $\lim f = \pm\infty$

Qu'est ce qu'un intégrale impropre ?

L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ a un sens si :

- f est bornée sur $[a, b]$
- avec discontinuités finies
- sinon :
  - elle peut avoir un sens ...
  - ou être complètement chamboulée

Que se passe t-il si f n'est même pas bornée ?

C'est à dire sur $[a, b]$ il y a un point où $\lim f = \pm\infty$

Dans ce cas là, on parle d'intégrale **impropre** !

Deuxième cas de figure ...

- f est bien bornée mais ...

- L'intervalle $]a, b[$ n'est pas bornée !

- De type $]-\infty, b]$

- ou $[a, +\infty[$

Deuxième cas de figure ...

- f est bien bornée mais ...

- L'intervalle $]a, b[$ n'est pas bornée !

- De type $]-\infty, b]$

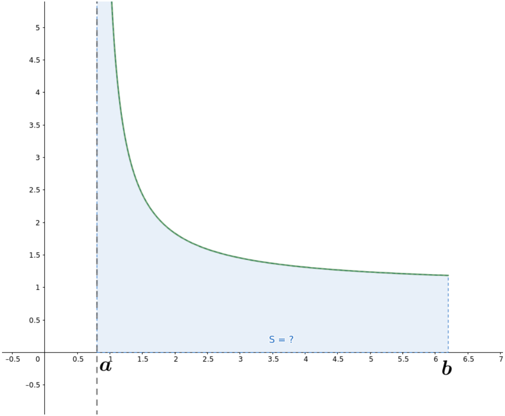
- ou $[a, +\infty[$

Donc une intégrale impropre traite une fonction non bornée ou bien des intervalles de bornes infinies !

Intégrale avec point d’explosion

cas où $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$

On dit que f explose au point c. Cette situation ressemble à ça :



Ce serait un gros mensonge de dire que l'intégrale est l'aire de la surface en bleu !

Car cette surface est infinie et va au-delà de l’espace sur la slide !

Car cette surface est infinie et va au-delà de l’espace sur la slide !

C’est vrai que la surface est infinie ... mais ça ne veut pas dire que l’aire est infinie non plus !

Car cette surface est infinie et va au-delà de l'espace sur la slide !

C'est vrai que la surface est infinie ... mais ça ne veut pas dire que l'aire est infinie non plus !

Il peut y avoir une "magie" mathématique si la surface infinie est assez mince

Car cette surface est infinie et va au-delà de l'espace sur la slide !

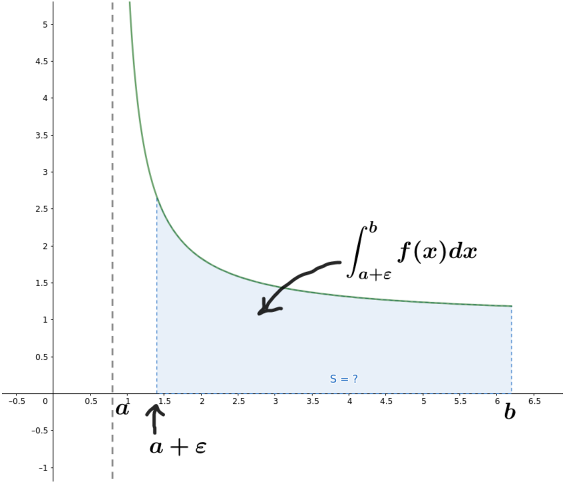
C'est vrai que la surface est infinie ... mais ça ne veut pas dire que l'aire est infinie non plus !

Il peut y avoir une "magie" mathématique si la surface infinie est assez mince

Si on essayait d'approcher un peut cette surface et éventuellement tendre vers un truc fini ? Pourquoi pas donc utiliser une limite ?

considérer un epsilon $\to 0$

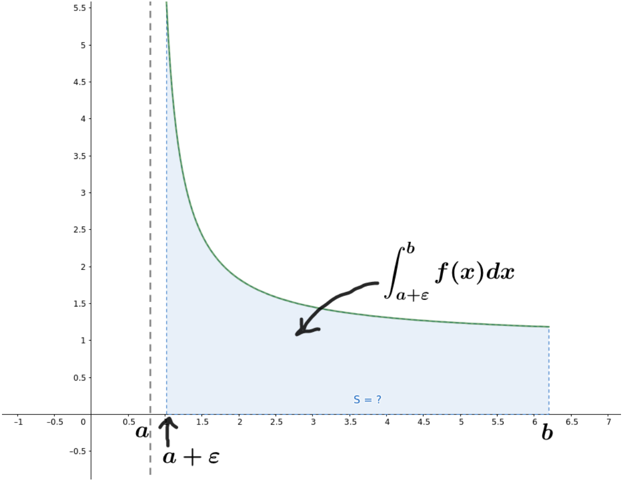
prendre un petit $\varepsilon > 0$ et



L'intégrale est bien finie !

Répéter

prendre un $\varepsilon > 0$ encore plus petit



Toujours finie, et on s'approche encore de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$!

- Si par "magie" $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = L \neq \pm\infty$

alors, dans ce cas , félicitations ! On dira que $\int_a^b f(x)dx$ **converge.**

- Si par "magie" $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = L \neq \pm\infty$

alors, dans ce cas , félicitations ! On dira que $\int_a^b f(x)dx$ **converge.**

- Sinon, si on n'arrive pas à trouver un L qui existe ou si $L = \pm\infty$ alors ...

- Si par "magie" $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = L \neq \pm\infty$

alors, dans ce cas , félicitations ! On dira que $\int_a^b f(x)dx$ **converge.**

- Sinon, si on n'arrive pas à trouver un L qui existe ou si $L = \pm\infty$ alors ...

ben , toujours , félicitations car $\int_a^b f(x)dx$ **diverge**

- Si par "magie" $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = L \neq \pm\infty$

alors, dans ce cas , félicitations ! On dira que $\int_a^b f(x)dx$ **converge.**

- Sinon, si on n'arrive pas à trouver un L qui existe ou si $L = \pm\infty$ alors ...

ben , toujours , félicitations car $\int_a^b f(x)dx$ **diverge**

> Le truc le plus important dans l'étude de l'intégrale est de savoir si elle diverge ou converge ... si elle converge, on n'est pas très intéressé forcément à connaître sa limite !

Exemples

- Considérons $\int_0^1 1/x \, dx$ et $\int_0^1 1/\sqrt{x} \, dx$

- Ce sont bien deux intégrales impropres mais

Exemples

- Considérons $\int_0^1 1/x\, dx$ et $\int_0^1 1/\sqrt{x}\, dx$

- Ce sont bien deux intégrales impropres mais

$$\int_0^1 1/x\, dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 1/x\, dx =$$

Exemples

- Considérons $\int_0^1 1/x\, dx$ et $\int_0^1 1/\sqrt{x}\, dx$

- Ce sont bien deux intégrales impropres mais

$$\int_0^1 1/x\, dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 1/x\, dx = \lim_{\epsilon \to 0} \Big[\ln(|x|) \Big]_\epsilon^1 = -\infty$$

Exemples

- Considérons $\int_0^1 1/x\,dx$ et $\int_0^1 1/\sqrt{x}\,dx$

- Ce sont bien deux intégrales impropres mais

$$\int_0^1 1/x\,dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 1/x\,dx = \lim_{\epsilon \to 0} \Big[\ln(|x|)\Big]_\epsilon^1 = -\infty$$

$$\int_0^1 1/\sqrt{x}\,dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 1/\sqrt{x}\,dx =$$

Exemples

- Considérons $\int_0^1 1/x \, dx$ et $\int_0^1 1/\sqrt{x} \, dx$

- Ce sont bien deux intégrales impropres mais

$$\int_0^1 1/x \, dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 1/x \, dx = \lim_{\epsilon \to 0} \left[\ln(|x|) \right]_\epsilon^1 = -\infty$$

$$\int_0^1 1/\sqrt{x} \, dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 1/\sqrt{x} \, dx = \lim_{\epsilon \to 0} \left[2\sqrt{x} \right]_\epsilon^1 = 2\sqrt{1}$$

Remarque importante

si f a l'unique asymptote verticale $x = a$ sur $[a, b]$ alors l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)dx$ n'est pas influencée par le changement de la valeur finie b (tant que f n'explose en ces choix de b)

Remarque importante

si f a l'unique asymptote verticale $x = a$ sur $[a, b]$ alors l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)dx$ n'est pas influencée par le changement de la valeur finie b (tant que f n'explose en ces choix de b)

Voici pourquoi ... D'abord : $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$.

Remarque importante

si f a l'unique asymptote verticale $x = a$ sur $[a, b]$ alors l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)dx$ n'est pas influencée par le changement de la valeur finie b (tant que f n'explose en ces choix de b)

Voici pourquoi ... D'abord : $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$.

Prenons un autre b (nommons le c), pourvu que f n'explose qu'en a sur l'intervalle $[a, c]$ alors on a toujours : $\int_a^c f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^c f(x)dx$

Remarque importante

si f a l'unique asymptote verticale $x = a$ sur $[a, b]$ alors l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)dx$ n'est pas influencée par le changement de la valeur finie b (tant que f n'explose en ces choix de b)

Voici pourquoi ... D'abord : $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$.

Prenons un autre b (nommons le c), pourvu que f n'explose qu'en a sur l'intervalle $[a, c]$ alors on a toujours : $\int_a^c f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^c f(x)dx$

Par Chasles, $\int_a^c f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\int_{a+\epsilon}^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \right)$

Remarque importante

si f a l'unique asymptote verticale $x = a$ sur $[a, b]$ alors l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)dx$ n'est pas influencée par le changement de la valeur finie b (tant que f n'explose en ces choix de b)

Voici pourquoi ... D'abord : $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$.

Prenons un autre b (nommons le c), pourvu que f n'explose qu'en a sur l'intervalle $[a, c]$ alors on a toujours : $\int_a^c f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^c f(x)dx$

Par Chasles, $\int_a^c f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\int_{a+\epsilon}^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \right)$ les deux termes à droite sont finis !

Explosion en b cette fois

On joue le même jeu ... c-à-d

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$$

Si la limite existe "convergence" sinon "divergence".

> Si sur un intervalle $[a, b]$ la fonction explose en un point c à l'intérieur de $[a, b]$ alors on traite deux problème $\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_a^{c-\epsilon} f(x)dx$ et $\int_{c+\epsilon}^b f(x)dx$

On va parler des intégrales de type

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

La discussion peut facilement s'étendre aux intégrales de type

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$$

On va parler des intégrales de type

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

La discussion peut facilement s'étendre aux intégrales de type

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx$$

Par définition

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{N \to +\infty} \int_a^N f(x)dx$$

On va parler des intégrales de type

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

La discussion peut facilement s'étendre aux intégrales de type

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$$

Par définition

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{N \to +\infty} \int_a^N f(x)dx$$

De même, si la limite existe et est finie alors on dit que ça converge sinon ça diverge.

Exemples

On étudie $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$

Exemples

On étudie $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$

On a $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{N\to\infty} \int_1^{N} \frac{1}{x} dx = \lim_{N\to\infty} [\ln(x))]_1^N = +\infty.$

Exemples

On étudie $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$

On a $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{N\to\infty} \int_1^{N} \frac{1}{x}dx = \lim_{N\to\infty} [\ln(x))]_1^N = +\infty.$

Et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{N\to\infty} \int_1^{N} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{N\to\infty} \left[\frac{-1}{x}\right]_1^N = 1.$

Exemples

On étudie $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$

On a $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{N\to\infty} \int_1^{N} \frac{1}{x} dx = \lim_{N\to\infty} [\ln(x))]_1^N = +\infty.$

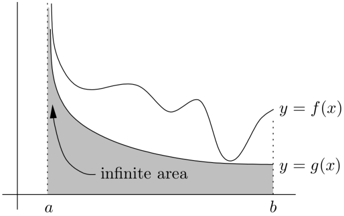
Et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{N\to\infty} \int_1^{N} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{N\to\infty} \left[\frac{-1}{x}\right]_1^N = 1.$

On en conclut que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ **diverge** et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ **converge**

Test de comparaison

Si $f(x) \geq g(x)$ avec g qui explose en a et f, g sont positives.

Imaginez maintenant que $\displaystyle\int_a^b g(x)dx = \infty$.

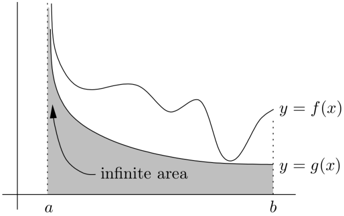


Que pensez-vous de $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$?

Test de comparaison

Si $f(x) \geq g(x)$ avec g qui explose en a et f, g sont positives.

Imaginez maintenant que $\int_a^b g(x)dx = \infty$.

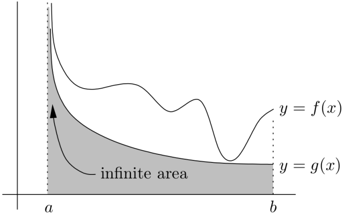


Que pensez-vous de $\int_a^b f(x)dx$? Forcément, elle diverge aussi.

Test de comparaison

Si $f(x) \geq g(x)$ avec g qui explose en a et f, g sont positives.

Imaginez maintenant que $\int_a^b g(x)dx = \infty$.



Que pensez-vous de $\int_a^b f(x)dx$? Forcément, elle diverge aussi.

car, $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx = \infty$

Que peut on dire maintenant si on inverse les rôles c'est à dire

$$\int_a^b f(x)dx = \infty \text{ et } f(x) \geq g(x) \,?$$

Que peut on dire maintenant si on inverse les rôles c'est à dire

$$\int_a^b f(x)dx = \infty \text{ et } f(x) \geq g(x) \text{ ?}$$

En fait, y'a rien à dire ...

Que peut on dire maintenant si on inverse les rôles c'est à dire

$$\int_a^b f(x)dx = \infty \text{ et } f(x) \geq g(x) \text{ ?}$$

En fait, y'a rien à dire ...

Une autre bonne nouvelle

Si on veut exploiter l'autre inégalité on a ...

Si $f(x) \leq g(x)$ positives et $\int_a^b g(x)dx = L < \infty$ (converge) alors $\int_a^b f(x)dx$ converge aussi.

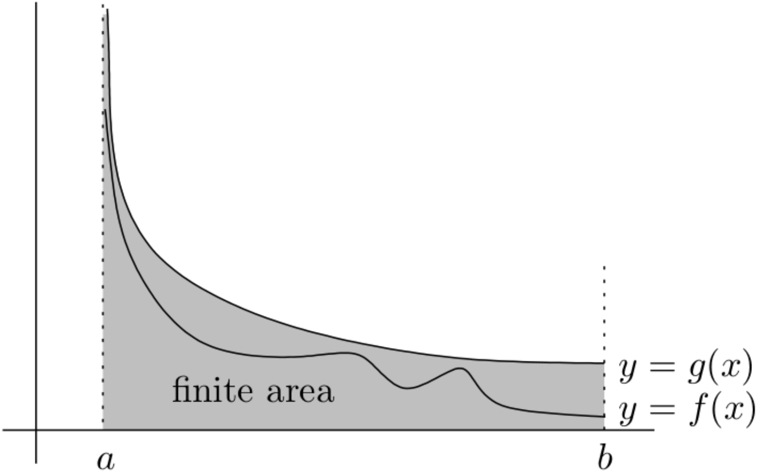
Une autre bonne nouvelle

Si on veut exploiter l'autre inégalité on a ...

Si $f(x) \leq g(x)$ positives et $\int_a^b g(x)dx = L < \infty$ (converge) alors $\int_a^b f(x)dx$ converge aussi.

Mathématiquement,

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx < \infty.$$


finite area
$y = g(x)$
$y = f(x)$
a
b

Équivalence des fonctions

Supposons que f est équivalente à g au voisinage de $x \to a$ c-à-d

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

On écrit $f \sim^a g$

Exemple

$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3-1000x^2+5x-7}{3x^3} = 1$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ donc $3x^3 - 1000x^2 + 5x - 7 \sim^\infty 3x^3$ et $\sin(x) \sim^0 x$.

Test d'équivalence

Comment employer ce principe ?

Test d'équivalence

Comment employer ce principe ?

$$\int_0^1 \frac{1}{\sin(\sqrt{x})}dx = ?$$

Test d'équivalence

Comment employer ce principe ?

$$\int_0^1 \frac{1}{\sin(\sqrt{x})} dx = ?$$

Il est difficile de trouver une primitive de $1/\sin(\sqrt{x})$

Test d'équivalence

Comment employer ce principe ?

$$\int_0^1 \frac{1}{\sin(\sqrt{x})} dx = ?$$

Il est difficile de trouver une primitive de $1/\sin(\sqrt{x})$

Mais, hereusement que $\lim_{x\to 0} \frac{1/\sin(\sqrt{x})}{1/\sqrt{x}} = 1$.

Test d'équivalence

Comment employer ce principe ?

$$\int_0^1 \frac{1}{\sin(\sqrt{x})} dx = ?$$

Il est difficile de trouver une primitive de $1/\sin(\sqrt{x})$

Mais, hereusement que $\lim_{x \to 0} \frac{1/\sin(\sqrt{x})}{1/\sqrt{x}} = 1$.

Et on sait que $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ converge donc $\int_0^1 \frac{1}{\sin(\sqrt{x})} dx$ converge.

Test de Riemann

Deux cas se présentent

1. 1er cas :
   - Si $p > 1$ alors pour $a > 0$, $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ converge
   - Si $p \leq 1$ alors pour $a > 0$, $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ diverge

Test de Riemann

Deux cas se présentent

1. 1er cas :
   - Si $p > 1$ alors pour $a > 0$, $\int_a^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ converge
   - Si $p \leq 1$ alors pour $a > 0$, $\int_a^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ diverge
2. 2ème cas :
   - Si $p \geq 1$ alors pour $a > 0$, $\int_0^{a} \frac{1}{x^p} dx$ diverge
   - Si $p < 1$ alors pour $a > 0$, $\int_a^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ converge

Convergence absolue

Finalement, on a

$$\int_a^b |f(x)|dx \text{ converge } \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ converge}$$