SEG – ANALYSE MATHÉMATIQUE

Fonctions à plusieurs variables

Pr. Hamza El Mahjour

7 novembre 2022

Objectifs

- Connaître le domaine de définition
- Représenter le domaine de définintion
- Déterminer la limite d’une fonction en un point
- Calculer les courbes de niveaux
- Calculer les dérivées partielles/Gradient
- Calculer la matrice Hessiene

$$f(x,y) = \ln(|x|-1) \times \ln(|y|-1)$$

$$f(x,y,z) = \sqrt{y-x} + \ln(z)$$

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x+y}$$

$$f(x,y) = \ln(|x|-1) \times \ln(|y|-1)$$

$$D_f =]-\infty,-1[\bigcup]1,+\infty[\ \times\ ]-\infty,-1[\bigcup]1,+\infty[$$

$$f(x,y,z) = \sqrt{y-x} + \ln(z)$$

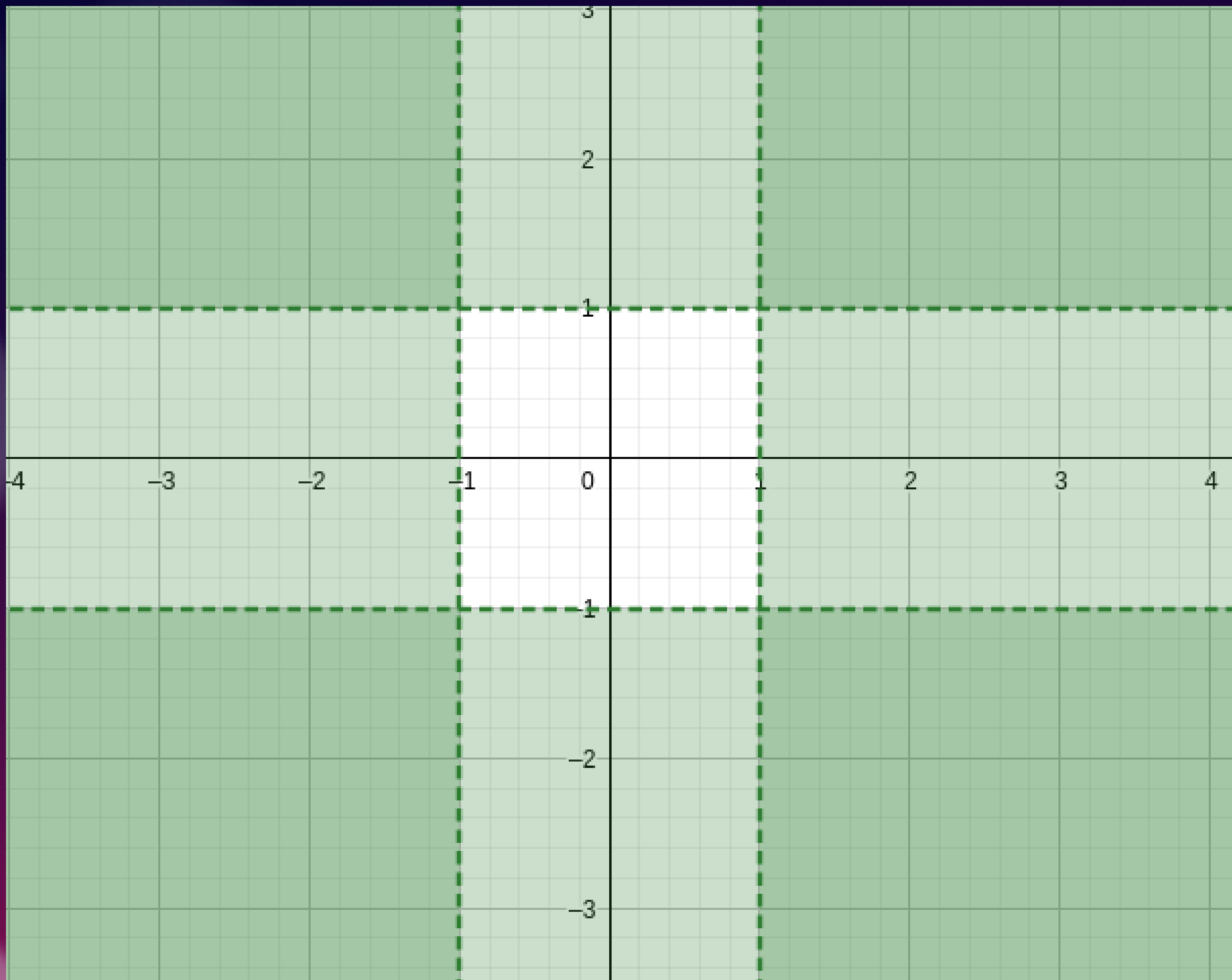
$$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad y \geq x\right\} \times \mathbb{R}_*^+$$

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x+y}$$

$$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad y \neq x\right\}$$

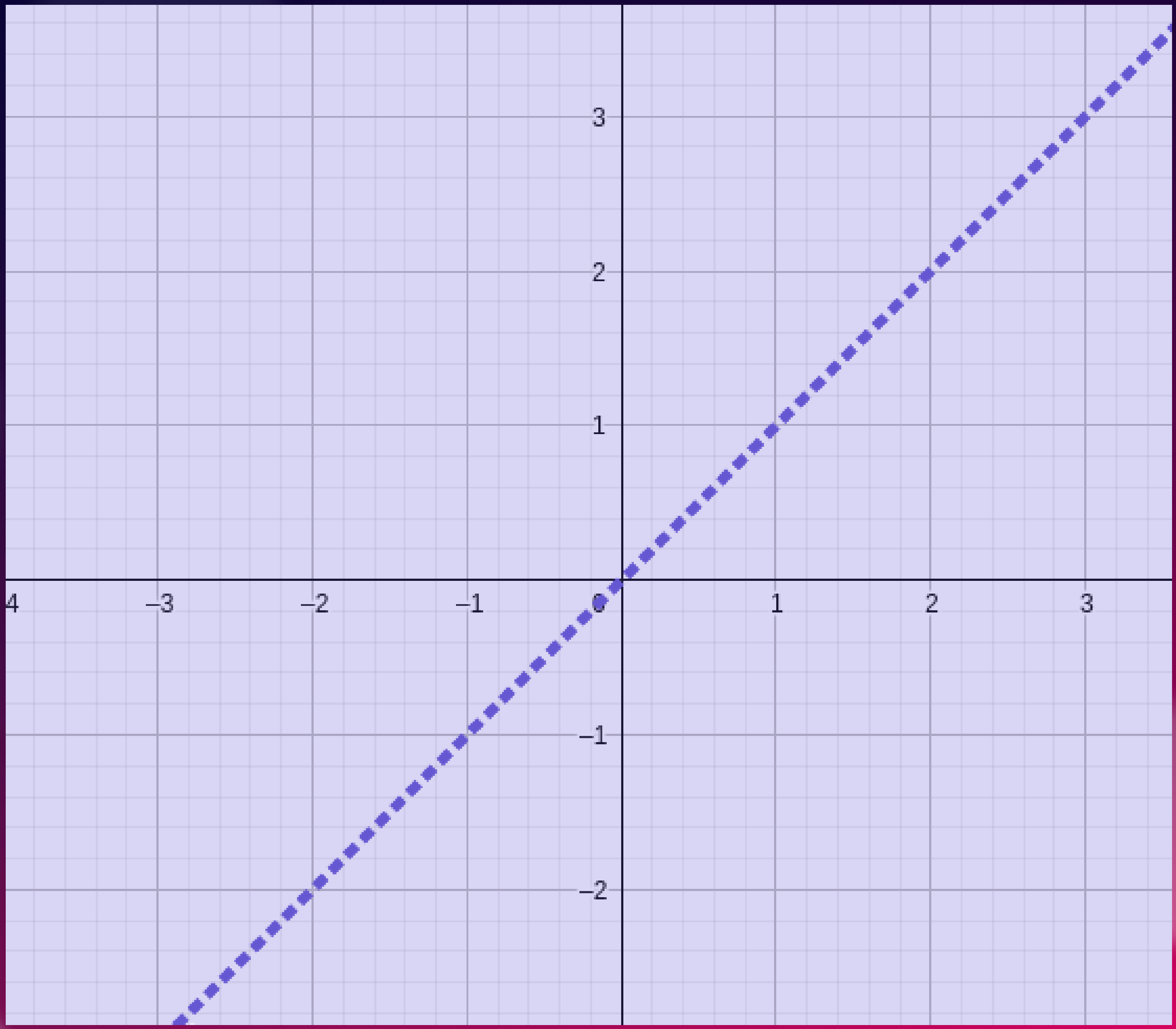
$$f(x,y)=\ln(|x|-1)\times\ln(|y|-1)$$

$$D_f=]-\infty,-1[\bigcup]1,+\infty[\ \times\ ]-\infty,-1[\bigcup]1,+\infty[$$



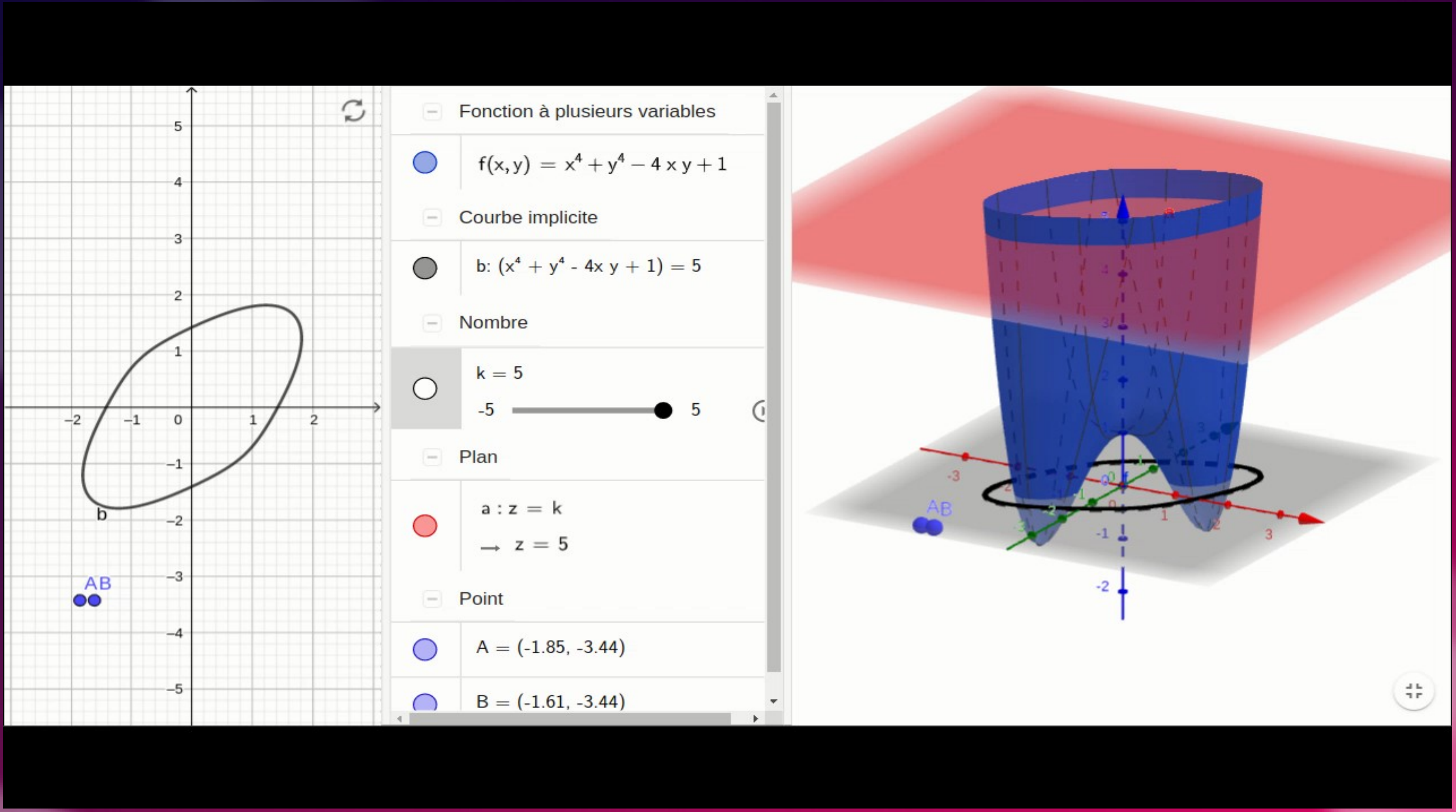
$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x+y}$$

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad y \neq x\}$$

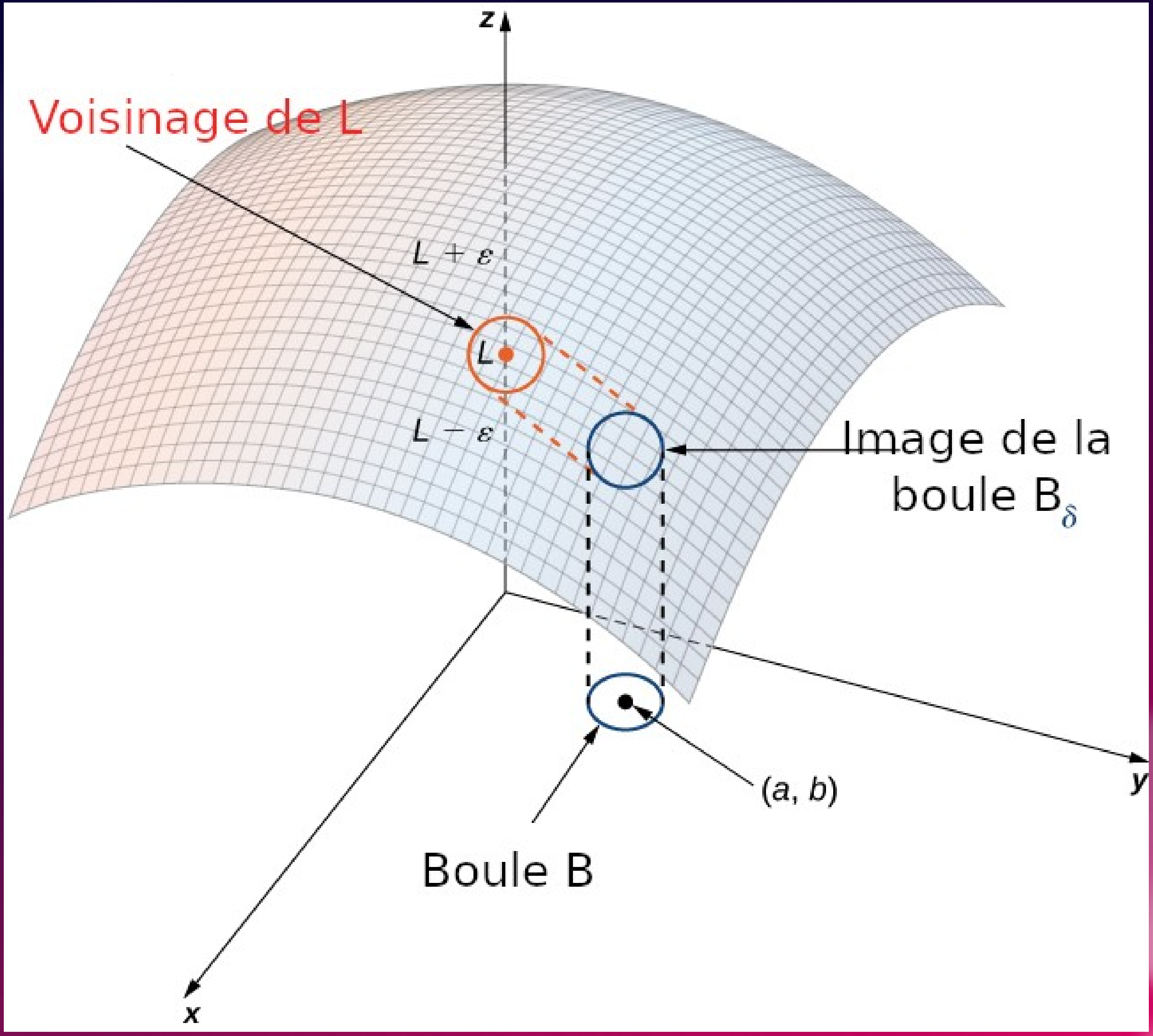


Courbes de niveaux

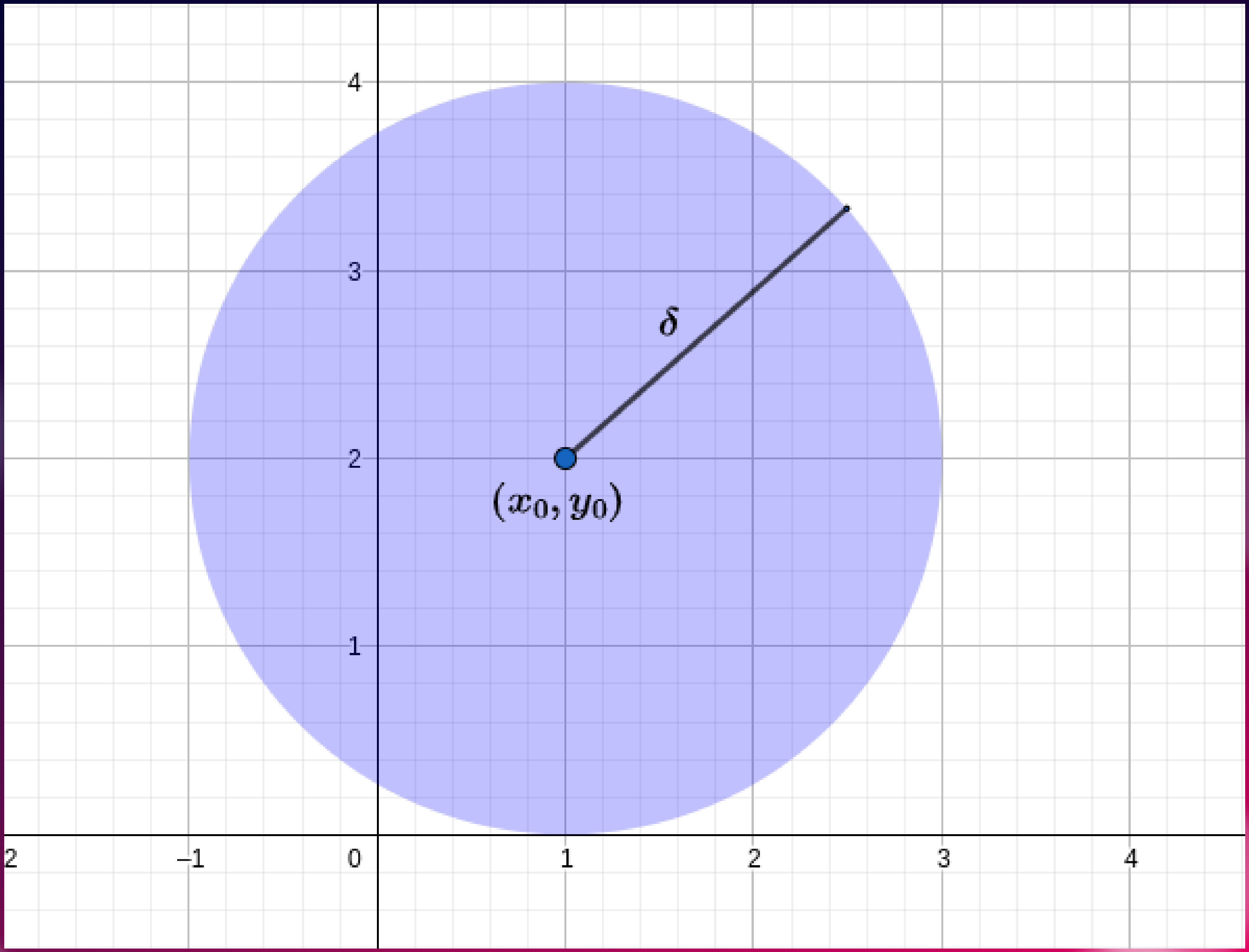
$$\mathcal{C}_a = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = a \right\}$$



Limites et continuité



$$\forall \varepsilon > 0, \exists B_o(x_0, \delta), y \in B(x_0, \delta) \implies |f(x,y) - L| < \varepsilon$$



Dérivées partielles

- En une seule dimension il y a avait une seule direction
- Maintenant il y a deux directions
- Dérivée suivant x et suivant y

- On va considérer deux fonctions
- f(x,.) = f_1(x)
- f(.y) = f_2(y)

Dérivabilité

- f(x,y) est différentiable si f(x,.) et f(.,y) sont dérivables
- Exemple:

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

différentiable car

f1 et f2 sont dérivables

- Dérivée partielle de f par rapport à x

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

- Dérivée partielle de f par rapport à y

$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

Exemples

- Exemple 1:

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y} = 2y$$

- Exemple 2:

$$f(x,y) = y^2 \sin(xy) + x$$

$$\frac{\partial(y^2 \sin(xy)+x)}{\partial x} = y^3 \cos(xy) + 1$$

$$\frac{\partial(y^2 \sin(xy)+x)}{\partial y} = xy^2 \cos(xy) + 2y \sin(xy)$$

Le gradient

Le gradient d'une fonction de plusieurs variables en un certain point est un vecteur qui caractérise la variabilité de cette fonction au voisinage de ce point.

En général

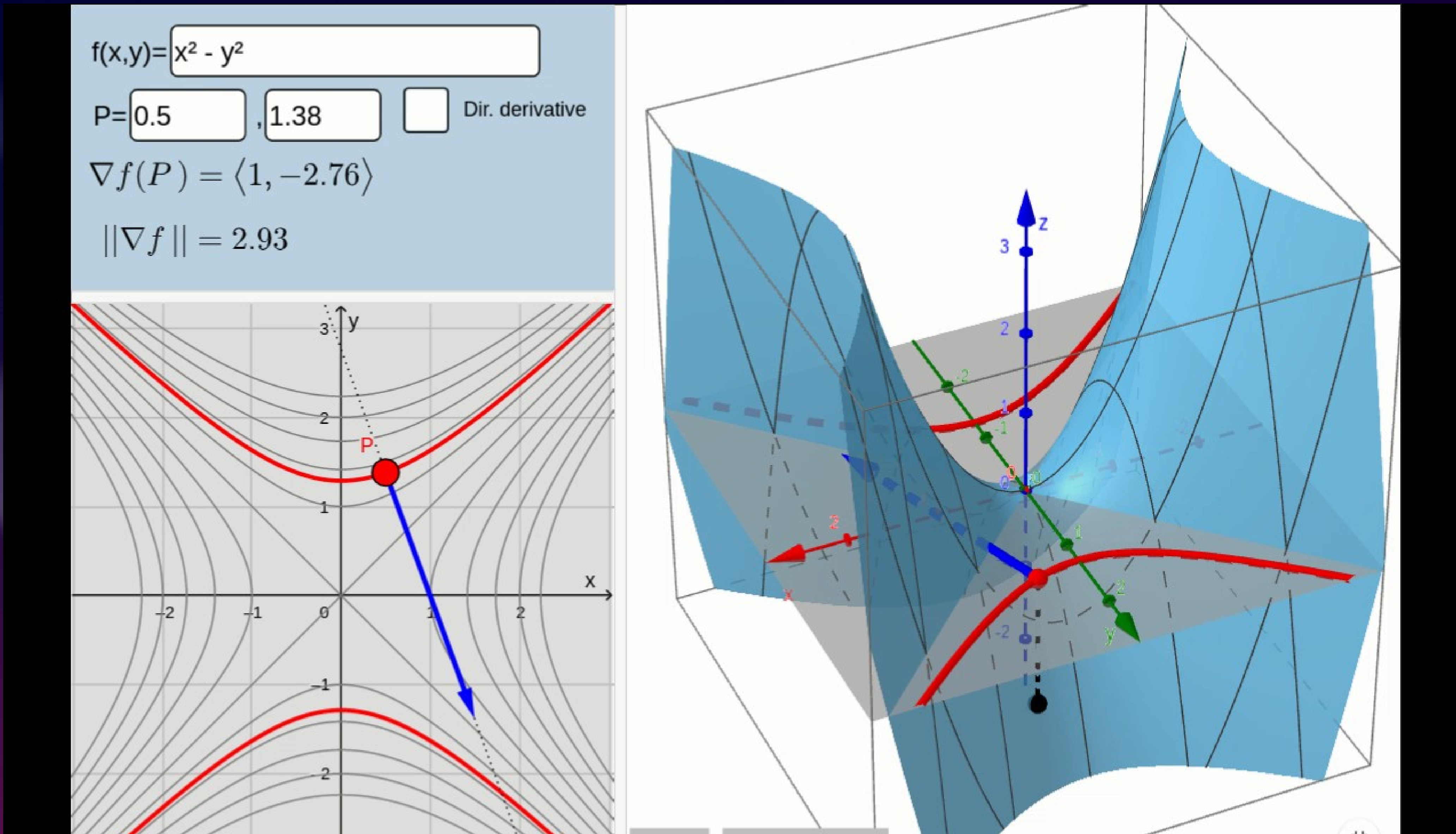
$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

En particulier

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ \\ -2y \end{pmatrix}$$


f(x,y)= x² - y²
P= 0.5 , 1.38
Dir. derivative
$\nabla f(P) = \langle 1, -2.76 \rangle$
$||\nabla f|| = 2.93$
P
x
y
z

Dérivées d'ordre 2 et Schwartz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$$

Théorème de Schwarz : Si f est deux fois dérivables par rapport à x et par rapport à y alors les dérivées croisées sont égales

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Contre-exemple

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1 \quad \text{tandis que} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$$