Analyse Mathématique - SEG - S1

Séquence 02 : Entraînements et exemples

Pr. Hamza El Mahjour

Faculté
Polydisciplinaire
Larache
Université Abdelmalek Essaâdi

Objectifs

1. Calculer des limites simples
2. Étudier des asymptotes de fonctions
3. Appliquer les propriétés de limites
4. Calculer les dérivées classiques de certaines fonctions
5. Utiliser les propriétés de dérivées pour effectuer des calculs complexes de dérivées
6. Appliquer les théorèmes déjà introduits

Commençons simples

$$\lim_{x \to 3} x + 1 = ?$$

$$\lim_{x \to 1} x^2 - 1 = ?$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 - 2}{\sqrt{x + 4}} = ?$$

$$\lim_{x \to 0} Ln(x^2 + 5) = ?$$

Réponses (1)

$$\lim_{x \to 3} x + 1 = 3 + 1 = 4$$

$$\lim_{x \to 1} x^2 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 - 2}{\sqrt{x + 4}} = \frac{(-2)^3 - 2}{\sqrt{-2 + 4}} = \frac{-8 - 2}{\sqrt{2}} = \frac{-10}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x \to 0} Ln(x^2 + 5) = Ln(0^2 + 5) = Ln(5)$$

Continuons ...

$$\lim_{x \to 3^+} x - 3 = ?$$

$$\lim_{x \to -1} x^2 + 1 = ?$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = ?$$

$$\lim_{x \to -\infty} Ln(x^2 + 5) = ?$$

Compliquons un petit peu

Exercice 1

Déterminer dans chacun des cas la limite demandée.

1. $$\lim_{x \to -3^+} \frac{1}{-2x-6}$$

2. $$\lim_{x \to 0^+} \left(\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) (x-3) \right)$$

3. $$\lim_{x \to 3^+} \frac{1-4x}{x-3}$$

Réponses (2)

1. $\lim_{x \to -3^+} (-2x - 6) = 0^-$ donc $\lim_{x \to -3^+} \dfrac{1}{-2x-6} = -\infty$

2. $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ donc $\lim_{x \to 0^+} \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = +\infty$.
   De plus $\lim_{x \to 0^+} (x - 3) = -3$.
   Par conséquent $\lim_{x \to 0^+} \left(\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)(x - 3)\right) = -\infty$

3. $\lim_{x \to 3^+} (1 - 4x) = -11$ et $\lim_{x \to 3^+} (x - 3) = 0^+$ donc
   $\lim_{x \to 3^+} \dfrac{1 - 4x}{x - 3} = -\infty$

Limites à l’infini

Question 1 :

En $+\infty$, $f : x \mapsto \dfrac{-3\,x^2 + x - 6}{x^2 + 1}$

Question 2 :

En $-\infty$, $f : x \mapsto \dfrac{4\,x^3 - x^2 + 1}{5\,x^2 - x + 2}$

Réponse longue ...

On factorise $-3\,x^2$ au numérateur et x^2 au dénominateur de la fraction

$$f(x) = \frac{-3\,x^2 + x - 6}{x^2+1}$$

$$f(x) = \frac{-3\,x^2\left(1 - \dfrac{1}{3\,x} + \dfrac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)}$$

$$f(x) = -3\,\frac{1 - \dfrac{1}{3\,x} + \dfrac{2}{x^2}}{1 + \dfrac{1}{x^2}}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{3\,x} + \dfrac{2}{x^2}\right) = 1$

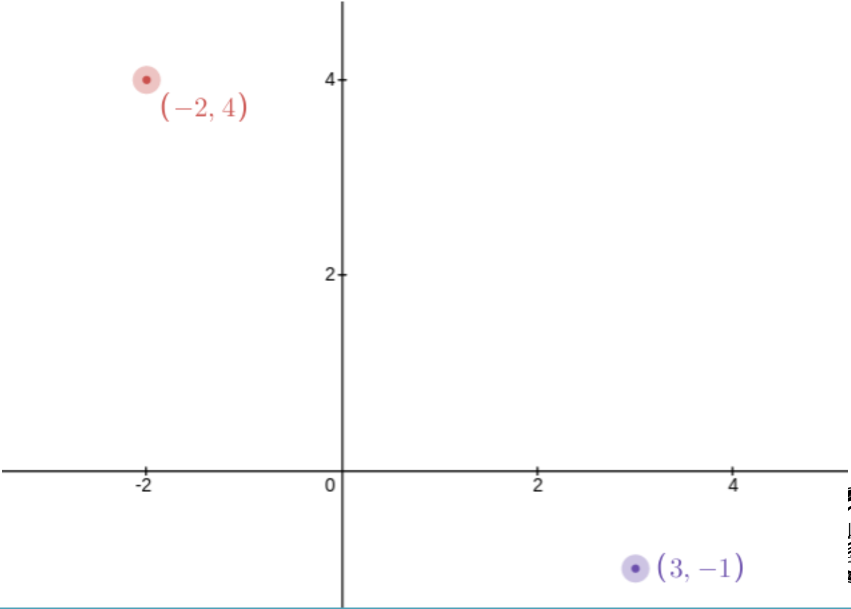
et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = 1,$

on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -3.$

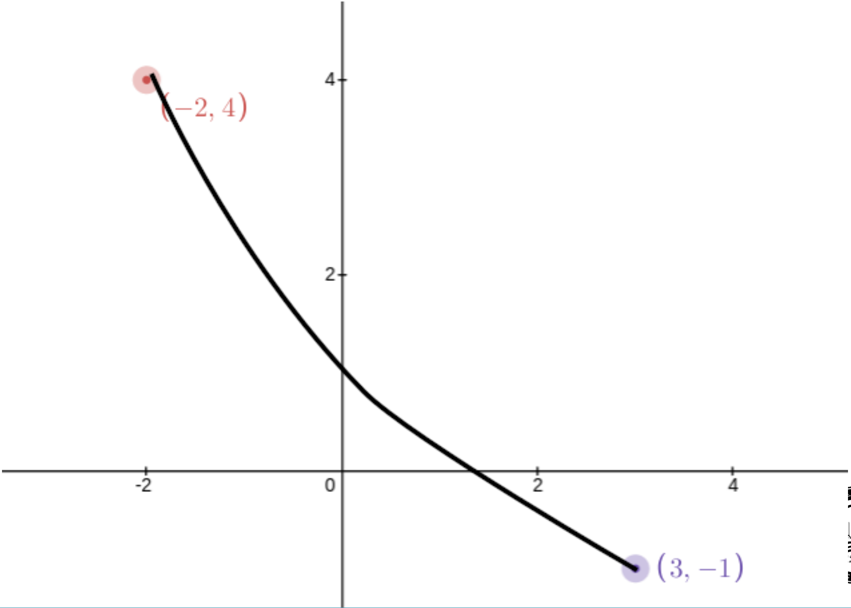
Réponse courte ...

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-3x^2 + x - 6}{x^2 + 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-3x^2}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} -3 = -3$$

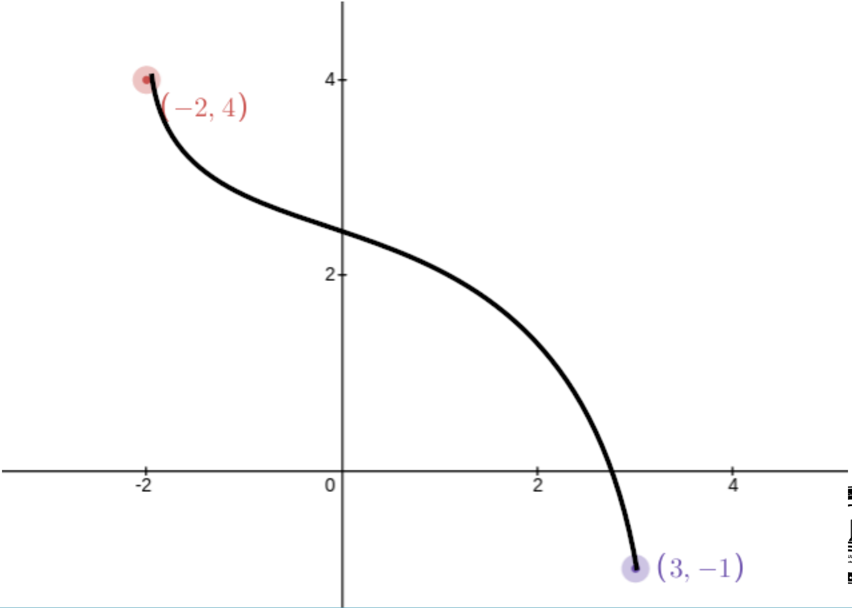
$f(a) \cdot f(b) < 0$? et après ...



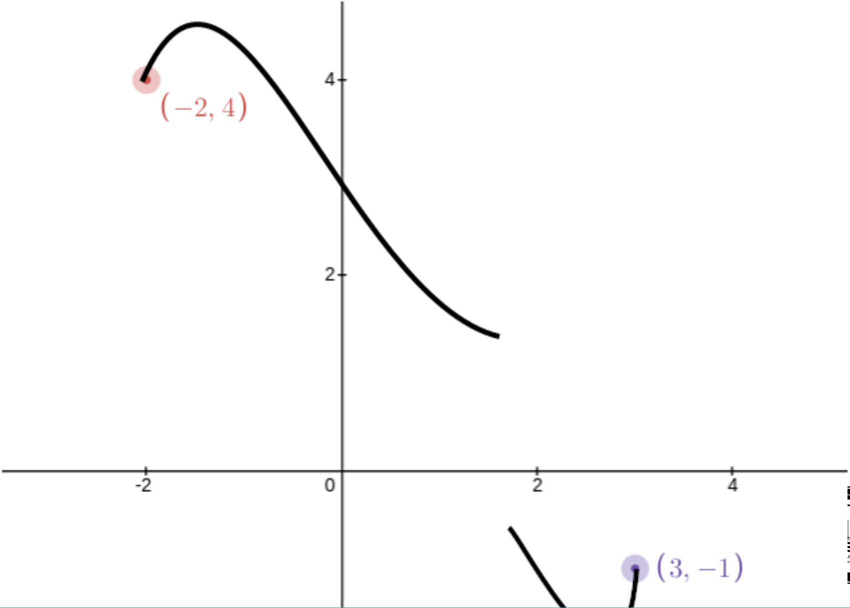
$f(a) \cdot f(b) < 0$? et après ...



$f(a) \cdot f(b) < 0$? et après ...



$f(a) \cdot f(b) < 0$? et après ...



$f(a) \cdot f(b) < 0$? **Ça alors !**

Theorem

Si f est continue sur $[a, b]$ est $f(a)f(b) < 0$ alors il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) = 0$.

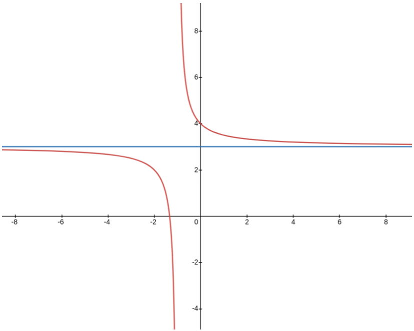
Exemple

$f(x) = x^3 - 3x + 1$. On a $f(-1) = 3$ et $f(1) = -1$ donc $f(1) \cdot f(-1) = -3 < 0$. Et puisque f est polynomiale donc continue sur $[-1, 1]$, alors il existe $x_0 \in] - 1, 1[$ tel que $f(x_0) = 0$.

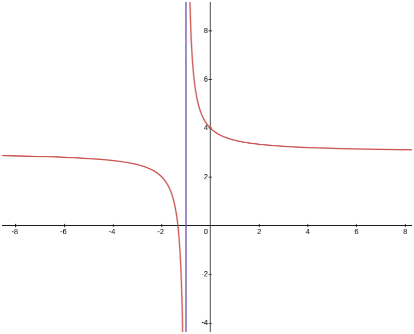
Asymptotes horizontales ou verticales ?

Prenons $f(x) = \frac{1}{x+1} + 3$ Étudions les limites de la fonction aux points critiques ! !

- $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$?
- $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$?
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$?
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$?



8
6
4
2
0
-2
-4
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8



8
6
4
2
0
-2
-4
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8

Dérivées

Rappelons d'abord des exemples simples

Tableau des dérivées

f	f '
$constante$	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n	$n \times x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$sin(x)$	$cos(x)$
$cos(x)$	$-sin(x)$

Appliquons ce qu'on sait

On veut calculer les dérivées de

- $x^2 \sin(x)$
- $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- $\sqrt{x} Ln(x)$
- $\frac{e^x}{x+1}$
- $e^{\cos(x)}$
- $\sin(Ln(x^2+1))$