Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté Polydisciplinaire
de Larache
SG-S1/Année 2024-2025

Contrôle Final
Mathématiques
Durée : 1 h 30
Pr. El Mahjour

Nom : ______________________
Prénom : ______________________
N°Ins : SG ______________________
Table n° : ______ **Salle :** ______

CALCULATRICE NON AUTORISÉE ______________________ Samedi 28 décembre 2024

1. (3 points) Calculer les limites suivantes :
   (a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{x}$ (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin(x) + 1}{x}$

2. (3 points) Donner le développement limité en 0 de la fonction $f(x) = (\ln(1+x))^2$ à l'ordre 4.

3. (3 points) (a) Calculer l'intégrale suivante en utilisant une intégration par parties : $\displaystyle\int_0^1 x e^x \, dx$.

   (b) Par les critères de comparaison et de Riemann, montrer que l'intégrale généalisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x + x^3} dx$ est convergente

4. (4 points) Soit $h(x,y) = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6} - x - y$.
   (a) En calculant les dérivées partielles premières de h, montrer que $x_* = (2,3)$ est le seul point critique.

$$\nabla_h = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

   (b) Calculer les dérivées secondes puis évaluer la matrice hessienne au point x_* puis déterminer la nature du point

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \ldots\ldots, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \ldots\ldots, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = \ldots\ldots, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = \ldots\ldots$$

$$H_h(2,3) = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$$

5. (3½ points) Soit $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(a) Calculer le déterminant de B.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(b) Calculer la comatrice de B puis donner l'inverse de B :

$$\mathrm{com}(B) = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \end{bmatrix}$$

Donc

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \end{bmatrix}$$

6. (3½ points) Dans une usine, deux produits X et Y sont fabriqués et rapportent (par unité) 2 Dhs pour le produit X et 5 Dhs pour le produit Y. On nécessite 2 heures de travail machines pour fabriquer le produit X et 1 heure pour fabriquer Y. En termes de matières premières, l'usine a besoin d'1 kilogramme pour produire X et 3 kg pour Y. En tout, on dispose de 10 heures travail machines et de 15 kg de matières premières. On veut maximiser le profit généré grâce à ces deux produits.

(a) Exprimer cet énoncé formellement comme un problème d'optimisation sous contraintes d'inégalité.

....

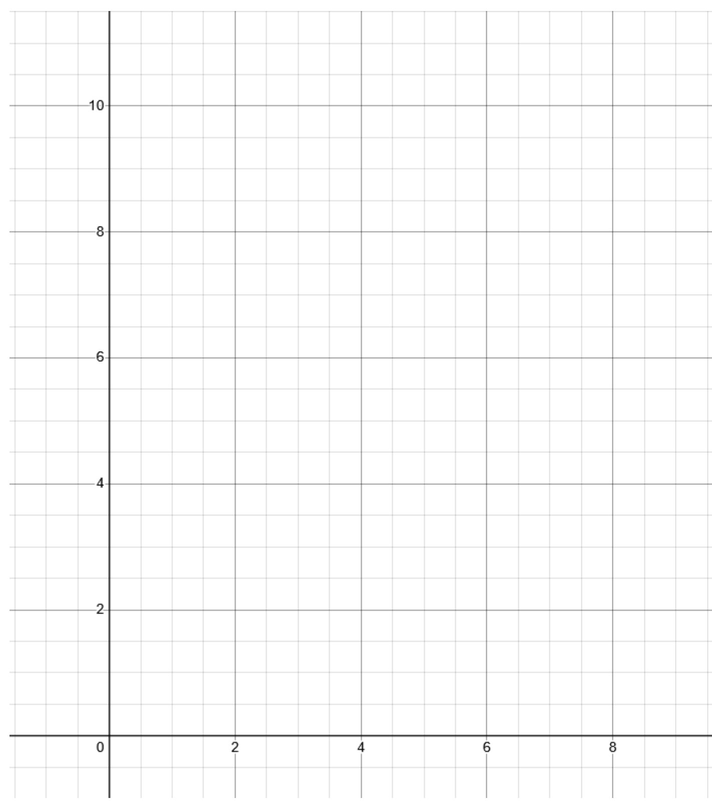
....

....

....

....

(b) Ci-dessous, Représenter graphiquement les domaines des contraintes



(c) Résoudre graphiquement le problème et donner les quantités exactes à produire de X et de Y pour une solution optimale.

....