TD n°3 : Analyse Mathématique

SEG - S1 - 2021/2022 - Pr. Hamza El Mahjour

Fonctions à plusieurs variables et optimisation

Exercice 1

Soit $f_1(x,y) = xy + x + y$ une fonction.

(a) Donner D_{f_1} le domaine de définition de f_1.

(b) Calculer $f_1(0,-1)$ et $f_1(1,-3)$.

Soit $f_2(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \ln(x+1)$

(c) Donner D_{f_2} le domaine de définition de f_2.

(d) Représenter graphiquement D_{f_2} sur un plan.

Soit $f_3(x,y) = \sqrt{|x|-2} + \sqrt{|y| - \frac{1}{2}}$

(e) Donner D_{f_3} le domaine de définition de f_3.

(f) Représenter graphiquement D_{f_3} sur un plan.

Correction ▼ [01]

Exercice 2

Soit la fonction définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x,y) = x^3 - y^3 + 2x^2 + 3y^2$$

(a) Justifier en quelques mots que la fonction est de classe $\mathscr{C}^2$.

(b) Calculer $f(-1,1)$ et $f(2,2)$.

(c) Donner le gradient de f et puis calculer $\nabla f_{(2,-5)}$.

(d) Donner la matrice Hessienne de f.

(e) Trouver les points critiques et étudier leur nature (minimum local, points selle ...)

Indication ▼ Correction ▼ [02]

Exercice 3

Trouver les points les points critiques de la fonction suivante et déterminer si ce sont des minima locaux, des maxima locaux ou des points selle.

$$g(x,y) = \sin x + y^2 - 2y + 1.$$

Correction ▼ [03]

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1,1[$ avec telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Soit $F :]-1,1[^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $F(x,y) = f(x)f(y)$.

(a) Montrer que F n'admet pas d'extremum relatif en $(0,0)$.

(b) Étudier si $(0,0)$ est un point critique.

Correction ▼ [04]

Exercice 5

Représenter les lignes de niveau des fonctions suivantes

(a) $f(x,y) = x + y - 1$; $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_{-1}$.

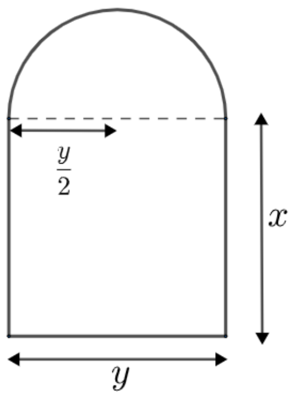
(b) $f(x,y) = x^2 + y^2$; $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.

(b) $f(x,y) = \sin(xy)$; $\mathscr{C}_{10}$ et $\mathscr{C}_{\frac{1}{2}}$.

Indication ▼ Correction ▼ [05]

Exercice 6

Une pièce de plastique produite par une usine a la forme suivante



Pour garantir un gain maximal dans la production, cette pièce doit avoir le plus petit périmètre possible. Mais pour des raisons technique aussi, la surface de cette pièce doit être $c = 2$. Donc quels sont les longeurs optimales de x et y.

Indication ▼ Correction ▼ [06]

Exercice 7

Correction ▼ [07]

Indication pour l'exercice 2 ▲

Il y a quatres points critiques : deux points selles, un minium local et un maximum local.

Indication pour l'exercice 5 ▲

On rappelle qu'une ligne de niveau a d'une fonction à deux variables (x_1,x_2) définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$.

$$\mathscr{C}_a = \{(x_1,x_2) \in D, \qquad f(x_1,x_2) = a\}.$$

Il faut donc écrire y en fonction de x.

Indication pour l'exercice 6 ▲

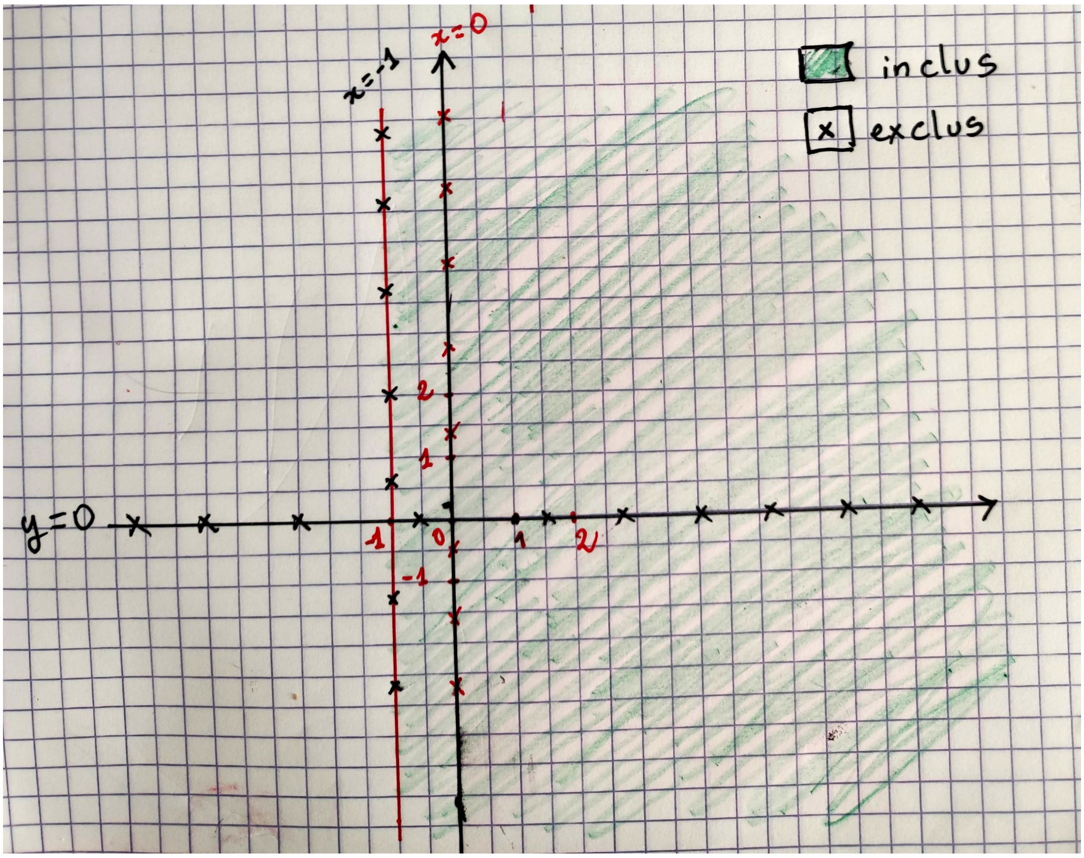
- Trouver d'abord l'expression du périmètre de cette pièce ... c'est facile
- Trouver l'expression de la surface aussi.
- Utiliser le multiplicateur de Lagrange en formulant les bonne fonctions.

Correction de l'exercice 1 ▲

(a) On a $D_{f_1} = \mathbb{R}^2$ car c'est une fonction de type polynôme à deux indéterminées.
(b) $f_1(0,-1) = -1$ et $f_1(1,-3) = -5$.
(c) On a

$$\begin{aligned} D_{f_2} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \neq 0, y \neq 0, x+1 > 0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \neq 0, y \neq 0, x > -1\} \\ D_{f_2} &=]-1,0[\bigcup]0,+\infty[\times]-\infty,0[\bigcup]0,+\infty[\end{aligned}$$

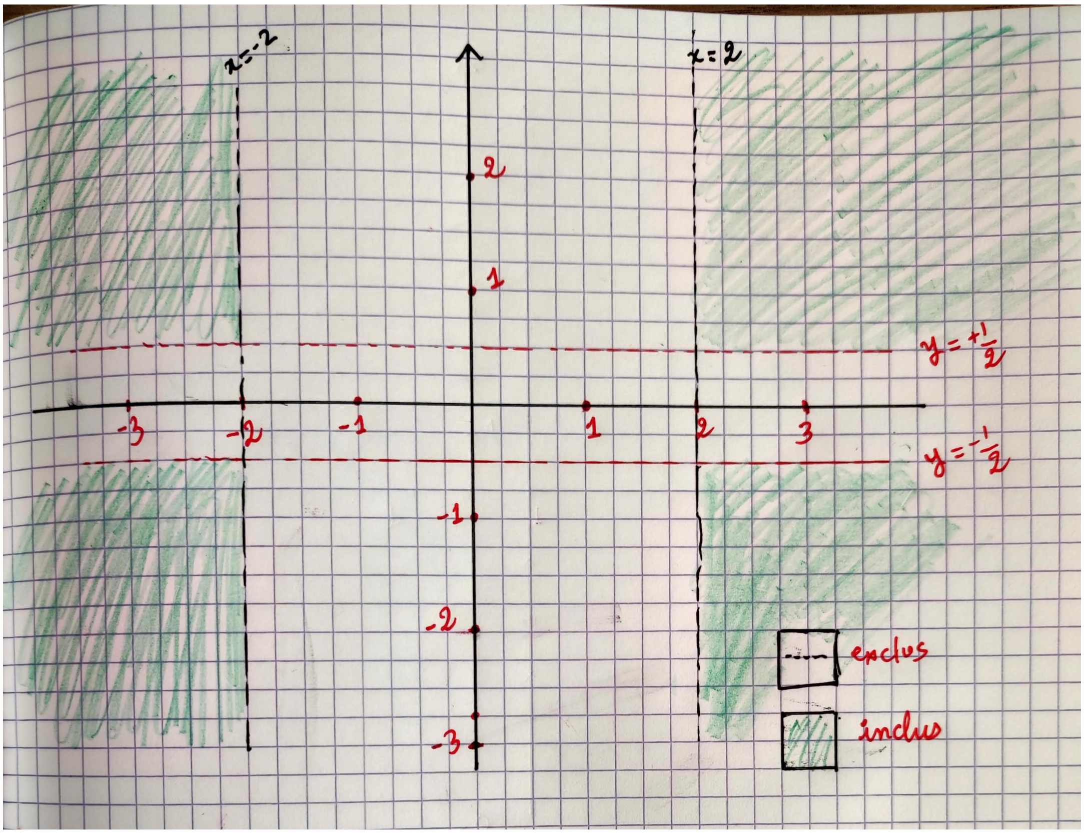
(d) Graphiquement



(e) On a

$$\begin{aligned} D_{f_3} &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |x|-2 > 0, |y| - \frac{1}{2} > 0\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x > 2 \text{ ou } x < -2, y > \frac{1}{2} \text{ ou } y < \frac{-1}{2}\right\} \\ D_{f_3} &=]-\infty,-2[\bigcup]2,+\infty[\times]-\infty,\frac{-1}{2}[\bigcup]\frac{1}{2},+\infty[. \end{aligned}$$

(d) Graphiquement



Correction de l'exercice 2 ▲

(a) C'est une fonction polynomiale donc de classe $\mathscr{C}^2$.

(b) $f(-1,1) = 3$ et $f(2,2) = 20$.

(c) $\nabla f_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2+4x \\ -3y^2+6y \end{pmatrix}$. Donc $\nabla f_{(2,-5)} = \begin{pmatrix} 20 \\ -45 \end{pmatrix}$.

(d) On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x+4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2+4x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

$$f(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2+6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y+6$$

Donc la matrice Hessienne est

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+4 & 0 \\ 0 & -6y+6 \end{pmatrix}.$$

(e) Les points critiques ont un gradient nul : $3x^2+4x = 0$ donc $x = 0$ ou $x = -4/3$ et $-3y^2+6y = 0$ donc $y = 0$ ou $y = 2$. On obtient quatre points.

point critique	Hessienne	Déterminant	Trace	Nature
$(0,0)$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$	24	10	min. loc.
$(0,2)$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$	-24	$--$	pt. selle
$(-4/3,0)$	$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$	-24	$--$	pt. selle
$(-4/3,2)$	$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$	24	-10	max. loc

---

Correction de l’exercice 3 ▲

Correction de l’exercice 4 ▲

Correction de l’exercice 5 ▲

Correction de l’exercice 6 ▲

Correction de l’exercice 7 ▲
