# TD n°2 : Analyse Mathématique

SEG - S1 - 2021/2022 - Pr. Hamza El Mahjour

# Intégrales définies et généralisées

### Exercice 1

1. Donner la famille de primitives de chaque fonction

$$
\begin{array}{llll}
a. f_1(x) = \cos(x + \frac{\pi}{4}) & b. f_2(x) = 3x^2 + 1 & c. f_3(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} & d. f_4(x) = -e^{x+1} \\
e. f_5(x) = -\dfrac{3}{x^2} & f. f_6(x) = \dfrac{2}{x+1} & g. \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} &
\end{array}
$$

2. Calculer

$$
\begin{array}{llll}
\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} f_1(x)dx; & \displaystyle\int_{-1}^{2} f_2 dx; & \displaystyle\int_{1}^{5} f_3(x)dx; & \displaystyle\int_{0}^{-1} f_4(x)dx; \\
\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{2}} f_5(x)dx; & \displaystyle\int_{0}^{e-1} f_6(x)dx; & \displaystyle\int_{0}^{1} f_7(x)dx. &
\end{array}
$$

Indication ▼ Correction ▼ [01]

### Exercice 2

1. Calculer les intégrales définies et indéfinies suivantes :

$$
\begin{array}{lll}
1. \displaystyle\int_0^1 t^2 e^t dt; & 2. \displaystyle\int_0^3 \ln(t+1)(t^2+1)dt & 3. \displaystyle\int_0^x \sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right) e^t dt \\
4. \displaystyle\int_{-3}^{3} \cos(t) t^4 dt & 5. \displaystyle\int \left(x^3 - 1\right) \tan(x) dx & 6. \displaystyle\int_{-\frac{10}{\pi}}^{\frac{10}{\pi}} \sin(t) + t^{15}\, dt
\end{array}
$$

Indication ▼ Correction ▼ [02]

### Exercice 3

Calculer les primitives suivantes :

$$
\begin{array}{ll}
1. \displaystyle\int e^x \sin(e^x)\, dx & 2. \displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\, dx \\
3. \displaystyle\int \frac{x^5}{1+x^6}\, dx & 4. \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, dx
\end{array}
$$

Indication ▼ Correction ▼ [03]

### Exercice 4

Étudier la natures des intégrales généralisées suivantes :

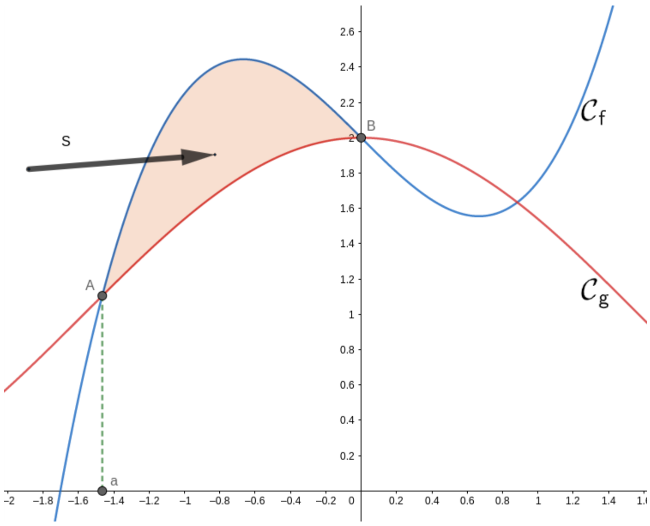
1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1}$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) dt$
4. $\displaystyle\int_0^{1} \ln t \, dt$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$
6. $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^2(\ln x)^3}$
7. $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^{0.5}(\ln x)^{1.6}}$

Indication ▼ Correction ▼ [04]

## Exercice 5

Soient $f(x) = \frac{3}{4}x^3 - x + 2$ et $g(x) = \cos(x) + 1$.

1. Donner les domaines de définition de $f$ et $g$
2. Montrer que $f$ et $g$ sont intégrables sur l'intervalle $[a, 0]$.
3. Calculer une primitive de $f$ et une primitive de $g$
4. Quel est l'aire de la surface $S$ entre le graphe de $f$ et le graphe de $g$ sur l'intervalle $[a, 0]$ (comme il est montré sur la figure ci-dessous). On considère que $a = -1.46$.




Indication ▼ Correction ▼ [05]

**Indication pour l'exercice 1 ▲**

Pensez à une primitive directe.

**Indication pour l'exercice 2 ▲**

- Pensez à des intégrales par parties.
- N'oubliez pas la règle ALPES

**Indication pour l'exercice 3 ▲**

1. Pensez au changmt.var $(u = e^x)$. 2. Chngmt.var $(x = 1 - x^2)$. 3. Chngmt.var $(u = 1 + x^6)$. 4. Chngmt.var $u = \sqrt{x+1}$.

**Indication pour l'exercice 4 ▲**

-Utilisez le principe de comparaison pour les fonctions positives.
-Comparer à une intégrale de Riemann $\frac{1}{x^\alpha}$
-Rappeler les intégrales de Bertrand et leur cas de convergence/divergence

**Indication pour l'exercice 5 ▲**

Pensez à la différence entre $f$ et $g$

**Correction de l'exercice 1 ▲**

Pour $C$ une constante.

a. $\int \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx = \sin(x+\frac{\pi}{4})+C$ ; b. $\int 3x^2+1dx = x^3+x+C$ ; c. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}+C$ ; d. $\int -e^{x+1} = -e^{x+1}+C$ ; e. $\int -\frac{3}{x^2}dx = \frac{3}{x}+C$. f. $\int \frac{2}{x+1}dx = 2\ln|x+1|+C$ ; g. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x)+C$.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx = \sin(x+\frac{\pi}{4})\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{0} = \sin(\frac{\pi}{4})-\sin(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}-1.$$

$$\int_{-1}^{2} 3x^2+1dx = x^3+x\Big]_{-1}^{2} = 12.$$

$$\int_{1}^{5} \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\Big]_{1}^{5} = 2(\sqrt{5}-1).$$

$$\int_{0}^{-1} -e^{x+1}dx = -e^{x+1}\Big]_{0}^{-1} = -e+1$$

**Correction de l'exercice 2 ▲**

1. On prend $u=t^2$ et $v'=e^t$ donc $u'=2t$ et $v=e^t$

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^2e^t dt &= \left[t^2e^t\right]_0^1 - 2\int_0^1 te^t dt\\ &= e-2\left[te^t\right]_0^1+2\int_0^1 e^t dt\\ &= e-2e+2\left[e^t\right]_0^1\\ &= e-2e+2e-2 = e-2\end{aligned}$$

2. On prend $u=\ln(t+1)$ e $v'=t^2+1$ donc $u'=\frac{1}{t+1}$ et $v=\frac{t^3}{3}+t$.

$$\int_0^3 \ln(t+1)(t^2+1) = \left[\ln(t+1)(\frac{t^3}{3}+t)\right]_0^3 - \frac{1}{3}\int_0^3 \frac{t^3+3t}{t+1}dt.$$

Cherchons une primitive de $t\mapsto \frac{t^3+3t}{t+1}$. En effet,

$$\begin{aligned}\frac{t^3+3t}{t+1} &= \frac{t^3+3t+3t^2+1-3t^2-1}{t+1}\\ &= \frac{t^3+3t^2+3t+1}{t+1}+\frac{-3t^2+3-4}{t+1}\\ &= \frac{(t+1)^3}{t+1}-3\frac{(t-1)(t+1)}{t+1}-\frac{4}{t+1}\\ &= (t+1)^2-3(t-1)-\frac{4}{t+1}.\end{aligned}$$

Donc

$$\int \frac{t^3+3t}{t+1}dt = \frac{1}{3}(t+1)^3-\frac{3}{2}(t-1)^2-4\ln(t+1)$$

Ce qui donne entre 0 et 3

$$\int_0^3 \frac{t^3+3t}{t+1}dt = \frac{4^3-1^3}{3}-\frac{3(2^2-(-1)^2)}{2}-4\ln(4) = \frac{33}{2}-4\ln(4)$$

et $\left[\ln(t+1)(t^3/3+t)\right]_0^3 = \ln(4)(3^3/3+3) = 12\ln(4)$ donc

$$\int_0^3 \ln(t+1)(t^2+1) = 12\ln(4) - \frac{1}{3}(\frac{33}{2} - 4\ln(4)) = \frac{40}{3}\ln(4) - \frac{11}{2} \simeq 12,983$$

3. Posons $u = e^t$ et $v' = \sin(t - \frac{\pi}{6})$ alors $u' = e^t$ et $v = -\cos(t - \frac{\pi}{6})$. Donc

$$\int_0^x e^t \sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right) dt = \left[e^t \cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right)\right]_x^0 + \int_0^x e^t \cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right) dt$$

Encore une intégrale par parties. Posons $u = e^t$ et $v' = \cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$. Donc $u' = e^t$ et $v = \sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$. Maintenant

$$\underbrace{\int_0^x e^t \sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right) dt} = \cos(-\frac{\pi}{6}) - e^x \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \left[e^t \sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right)\right]_0^x - \underbrace{\int_0^x e^t \sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right) dt}$$

Donc

$$\begin{aligned} 2\int_0^x e^t \sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right) dt &= \cos(-\frac{\pi}{6}) - e^x \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + e^x \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin(-\frac{\pi}{6}) \\ \int_0^x e^t \sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right) dt &= \frac{-e^x \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + e^x \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

4. On remarque que c'est une fonction paire (car c'est un produit de deux fonctions paires ou deux fonctions impaires est toujours paire), donc

$$\int_{-3}^3 \cos(t) t^4 dt = \int_0^3 \cos(t) t^4 dt$$

Pour résoudre l'exercice on prend $u = t^4$ et $v' = \cos(t)$ ensuite $u = t^3$ et $v' = \sin(t)$ ensuite $u = t^2$ et $v' = \cos(t)$ ... jusqu'à ce qu'on obtienne une intégrale ou il n'y que un cos ou un sin.

6. $t \mapsto \sin(t)$ et $t \mapsto t^{15}$ sont impaires donc leur somme est une fonction impaire aussi. Et puisque l'intégration se fait sur un intervalle symétrique donc $\int_{-\frac{10}{\pi}}^{\frac{10}{\pi}} \sin(t) + t^{15}\, dt = 0$.

---

## Correction de l'exercice 3 ▲

1. $\int e^x \sin(e^x)\, dx = -\cos(e^x) + C$;
2. $\int x\sqrt{1-x^2}\, dx = -\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$
3. $\int \frac{x^5}{1+x^6}\, dx = \ln(x^6+1) + C$
4. $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, dx = \frac{2\sqrt{x+1}(x-2)}{3}$

---

## Correction de l'exercice 4 ▲

1. On étudie $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t-1} dt$. On a $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t-1} dt = \int_0^1 \frac{1}{e^t-1} dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{e^t-1} dt$. Et on sait que pour $t \geqslant 1$ ; $e^t - 1 > t^2$. Donc $\frac{1}{e^t-1} < \frac{1}{t^2}$ et $\int_1 +\infty \frac{1}{t^2} dt$ converge (car la dernière est une intégrale de Riemann de type $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt)$ et $\alpha > 1$. Par contre, entre 0 et 1, nous savons que $\lim_{t\to 0} \frac{1/t}{1/(e^t-1)} = \lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$ donc $t \mapsto \frac{1}{e^t-1}$ est équivalent à $\frac{1}{t}$ au voisinage de 0. Or, $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ diverge (comme intégrale de Riemann avec une puissance $\alpha = 1$).

2. On étudie $\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}dt$. On a $\lim_{t\to+\infty} t^3e^{-\sqrt{t}} = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{1+t^2} = 0$ donc pour un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit ($\varepsilon < 1$) il existe $A > 0$ tel que $\forall t > A, t^3e^{-\sqrt{t}} < \varepsilon$ et il existe $A' > 0$ tel que $\frac{1}{1+t^2} < \varepsilon$. Soit $\overline{A} = \max(A, A')$. Donc, pour tout $t > \overline{A}$, $\frac{t^3e^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} < \varepsilon^2 < \varepsilon < 1$ donc $\frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} < \frac{1}{t^2}$ pour $t > \overline{A}$. C'est à dire que $\int_{\overline{A}}^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge (car c'est une intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$). Et la fonction $t \mapsto \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}$ est continue sur le fermé borné $[0, \overline{A}]$ donc elle est intégrale (d'intégrale finie) sur $[0, \overline{A}]$. En utilisant la propriété de Chasles : $\int_0^{+\infty} = \underbrace{\int_0^{\overline{A}}}_{\text{conv.}} + \underbrace{\int_{\overline{A}}^{+\infty}}_{\text{conv.}}$ donc convergente.

3. On sait que $\cos^2(x) \leqslant |\cos(x)|^2 \leqslant 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc $\int_0^1 \cos^2(1/t)dt \leqslant \int_0^1 1dt = 1$. Par le principe de comparaison des intégrales positives, on conclut que $\int_0^1 \cos^2(1/t)dt$ est convergente.

4. $\int_0^1 \ln(t)dt = \lim_{x\to 0^+} \left[t\ln(t) - t\right]_x^1 = -1 - \lim_{x\to 0^+} \underbrace{x\ln(x)}_{\to 0} + \underbrace{x}_{\to 0} = -1 < \infty$ donc convergente.

5. (déjà répondu dans le cours) 6. 7. Intégrales de Bertrand Dicsutez suivant $\alpha$, $\beta$ et les bornes de l'intégrale

---

**Correction de l'exercice 5 ▲**

1. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$

2. Fonction polynomiale continue sur un fermé borné. Somme d'une fonction cos et une constante toutes les deux continues sur un fermé borné donc intégrables.

4. C'est la différence de l'aire au-dessous de $f$ et l'aire au-dessous de $g$. Donc

$$S = \int_a^0 f(x)dx - \int_a^0 g(x)dx \approx 3,13 - 2,45 = 0,68$$