TD n°2 : Analyse Mathématique

SEG - S1 - 2022/2023 - Pr. Hamza El Mahjour

Intégrales définies et impropres

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^2 -e^{x+1} dx \qquad I_2 = \int_{-3}^3 3x^2 + 1 dx \quad I_3 = \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$$
$$I_4 = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^2(x) dx \quad I_5 = \int_0^1 \frac{1}{2+x^2} dx \quad I_6 = \int_0^\pi \frac{1}{x^2+2x+5} dx$$

Correction ▼ [01]

Exercice 2

Calculer les intégrales définies et indéfinies suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 t^2 e^t \, dt;$
2. $\displaystyle\int_0^3 \ln(t+1)(t^2+1) \, dt$
3. $\displaystyle\int_0^x \sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right) e^t \, dt$
4. $\displaystyle\int_{-3}^3 \cos(t) t^4 \, dt$
5. $\displaystyle\int_{-\frac{10}{\pi}}^{\frac{10}{\pi}} \sin(t) + t^{15} \;\; dt$

Correction ▼ [02]

Exercice 3

Calculer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int e^x \sin(e^x) \;\; dx$
2. $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2+2x)^3} \;\; dx$
3. $\displaystyle\int \frac{x^5}{1+x^6} \;\; dx$
4. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} \;\; dx$

Correction ▼ [03]

Exercice 4

Étudier la natures des intégrales généralisées suivantes :

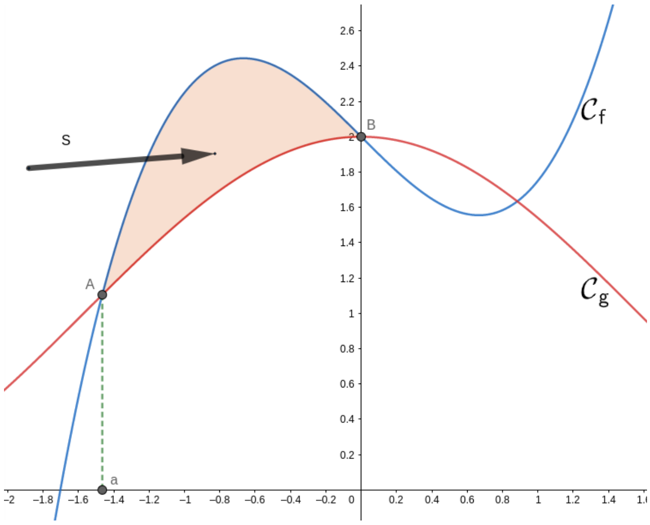
1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1}$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t e^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt$
3. $\displaystyle\int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) dt$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

Correction ▼ [04]

Exercice 5

Soient $f(x)=\frac{3}{4}x^3-x+2$ et $g(x)=\cos(x)+1$.

1. Donner les domaines de définition de f et g
2. Montrer que f et g sont intégrables sur l'intervalle $[a,0]$.
3. Calculer une primitive de f et une primitive de g
4. Quel est l'aire de la surface S entre le graphe de f et le graphe de g sur l'intervalle $[a,0]$ (comme il est montré sur la figure ci-dessous). On considère que $a=-1.46$.



Correction ▼ [05]

Exercice 6

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose :

$$J_n=\int_0^x \frac{t^n e^{1-t}}{n!}dt$$

1. Calculer J_1.
2. Exprimer J_{n+1} en fonction de J_n pour tout $n\geqslant 1$.
3. En déduire J_n en fonction de n.

[]

Exercice 7

Étudier la convergence des intégrales impropres suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{2+20\sqrt{x}}dx.$
2. $\displaystyle\int_5^{\infty}\frac{\sin(x^4)}{\sqrt{x}+x^2}dx.$

[]

Correction de l'exercice 1 ▲

- $\displaystyle\int_0^2 -e^{x+1}\,dx = \Big[-e^{x+1}\Big]_0^2 = e - e^3 \simeq -17,36$
- $\displaystyle\int_{-3}^3 3x^2+1\,dx = 2\int_0^3 3x^2+1$ car c'est une fonction paire. $= 2\Big[x^3+x\Big]_0^3 = 2(27+3) = 60$
- $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \Big[2\sqrt{x-1}\Big]_2^3 = 2\sqrt{2}-2 \simeq 0,82$
- $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^2(x) = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1-\cos(2x)}{2} = \Big[x/2-\sin(2x)/4\Big]_{\pi/4}^{\pi/2} = \pi/8+1/4 \simeq 0.64$
- On a $\displaystyle\frac{1}{2+x^2} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{1+(\frac{x}{\sqrt{2}})^2}$. Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+x^2}\,dx = \Big[\arctan(x/\sqrt{2})\Big]_0^2 = \arctan(2/\sqrt{2}) \simeq 0,96$
- C'est aussi le même principe précédent, on cherche à compléter le carré du dénominateur, c-à-d écrire x^2+2x+5 sous la forme $(x+b)^2+c$. On obtient donc $x^2+2x+5 = x^2+2bx+b^2+c$ qui donc un système de deux équations $2b=2$ et $b^2+c=5$ donc $b=1$ et $c=4$. Alors $\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+4}dx$, en factorisant par $4=2^2$ on obtient $\displaystyle\frac{1}{4}\int\frac{1}{(\frac{x+1}{2})^2+1}dx$ en dérivant $\frac{x+1}{2}$, on obtiendra $1/2$. Donc, on compense pour obtenir $\frac{2}{4}\int\frac{1/2}{(\frac{x+1}{2})^2+1} = 1/2\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$. Donc $I_6 = \left[\frac{1/2}{(\frac{x+1}{2})^2+1}\right]_0^\pi$

Correction de l'exercice 2 ▲

1. On prend $u=t^2$ et $v'=e^t$ donc $u'=2t$ et $v=e^t$

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^2e^t\,dt &= \Big[t^2e^t\Big]_0^1 - 2\int_0^1 te^t\,dt\\ &= e-2\Big[te^t\Big]_0^1+2\int_0^1 e^t\,dt\\ &= e-2e+2\Big[e^t\Big]_0^1\\ &= e-2e+2e-2 = e-2\end{aligned}$$

2. On prend $u=\ln(t+1)$ e $v'=t^2+1$ donc $u'=\frac{1}{t+1}$ et $v=\frac{t^3}{3}+t$.

$$\int_0^3 \ln(t+1)(t^2+1) = \Big[\ln(t+1)(\frac{t^3}{3}+t)\Big]_0^3 - \frac{1}{3}\int_0^3\frac{t^3+3t}{t+1}dt\ .$$

Cherchons une primitive de $t\mapsto\frac{t^3+3t}{t+1}$. En effet,

$$\begin{aligned}\frac{t^3+3t}{t+1} &= \frac{t^3+3t+3t^2+1-3t^2-1}{t+1}\\ &= \frac{t^3+3t^2+3t+1}{t+1}+\frac{-3t^2+3-4}{t+1}\\ &= \frac{(t+1)^3}{t+1}-3\frac{(t-1)(t+1)}{t+1}-\frac{4}{t+1}\\ &= (t+1)^2-3(t-1)-\frac{4}{t+1}.\end{aligned}$$

Donc

$$\int \frac{t^3+3t}{t+1}dt = \frac{1}{3}(t+1)^3 - \frac{3}{2}(t-1)^2 - 4\ln(t+1)$$

Ce qui donne entre 0 et 3

$$\int_0^3 \frac{t^3+3t}{t+1}dt = \frac{4^3-1^3}{3} - \frac{3(2^2-(-1)^2)}{2} - 4\ln(4) = \frac{33}{2} - 4\ln(4)$$

et $\left[\ln(t+1)(t^3/3+t)\right]_0^3 = \ln(4)(3^3/3+3) = 12\ln(4)$ donc

$$\int_0^3 \ln(t+1)(t^2+1) = 12\ln(4) - \frac{1}{3}(\frac{33}{2} - 4\ln(4)) = \frac{40}{3}\ln(4) - \frac{11}{2} \simeq 12,983$$

3. Posons $u = e^t$ et $v' = \sin(t-\frac{\pi}{6})$ alors $u' = e^t$ et $v = -\cos(t-\frac{\pi}{6})$. Donc

$$\int_0^x e^t \sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right)dt = \left[e^t \cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\right]_x^0 + \int_0^x e^t \cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)dt$$

Encore une intégrale par parties. Posons $u = e^t$ et $v' = \cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)$. Donc $u' = e^t$ et $v = \sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right)$. Maintenant

$$\underbrace{\int_0^x e^t \sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right)dt} = \cos(-\frac{\pi}{6}) - e^x\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) + \left[e^t \sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\right]_0^x - \underbrace{\int_0^x e^t \sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right)dt}$$

Donc

$$\begin{aligned} 2\int_0^x e^t \sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right)dt &= \cos(-\frac{\pi}{6}) - e^x\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) + e^x\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) - \sin(-\frac{\pi}{6}) \\ \int_0^x e^t \sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right)dt &= \frac{-e^x\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) + e^x\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

4. On remarque que c'est une fonction paire (car c'est un produit de deux fonctions paires ou deux fonctions impaires est toujours paire), donc

$$\int_{-3}^3 \cos(t)t^4 dt = 2\int_0^3 \cos(t)t^4 dt$$

Pour résoudre l'exercice on prend $u = t^4$ et $v' = \cos(t)$ ensuite $u = t^3$ et $v' = \sin(t)$ ensuite $u = t^2$ et $v' = \cos(t)$ ... jusqu'à ce qu'on obtienne une intégrale ou il n'y a que un cos ou un sin.

5. $t \mapsto \sin(t)$ et $t \mapsto t^{15}$ sont impaires donc leur somme est une fonction impaire aussi. Et puisque l'intégration se fait sur un intervalle symétrique donc $\int_{-\frac{10}{\pi}}^{\frac{10}{\pi}} \sin(t) + t^{15} \quad dt = 0$.

Correction de l'exercice 3 ▲

---

1. $\int e^x \sin(e^x) \quad dx = -\cos(e^x) + C;$
2. $\int x\sqrt{1-x^2} \quad dx = -\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$
3. $\int \frac{x^5}{1+x^6} \quad dx = \ln(x^6+1) + C$
4. $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} \quad dx = \frac{2\sqrt{x+1}(x-2)}{3}$

Correction de l'exercice 4 ▲

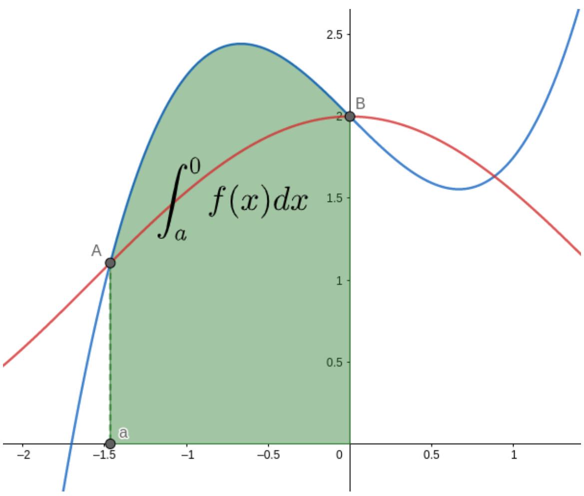
1. On étudie $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t-1}dt$. On a $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t-1}dt = \int_0^1 \frac{1}{e^t-1}dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{e^t-1}dt$. Et on sait que pour $t \geqslant 1$; $e^t - 1 > t^2$. Donc $\frac{1}{e^t-1} < \frac{1}{t^2}$ et $\int_1 +\infty \frac{1}{t^2}dt$ converge (car la dernière est une intégrale de Riemann de type $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$) et $\alpha > 1$. Par contre, entre 0 et 1, nous savons que $\lim_{t\to 0} \frac{1/t}{1/(e^t-1)} = \lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$ donc $t \mapsto \frac{1}{e^t-1}$ est équivalent à $\frac{1}{t}$ au voisinage de 0. Or, $\int_0^1 \frac{1}{t}dt$ diverge (comme intégrale de Riemann avec une puissance $\alpha = 1$).
2. On étudie $\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}dt$. On a $\lim\limits_{t\to+\infty} t^3e^{-\sqrt{t}} = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{1+t^2} = 0$ donc pour un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit ($\varepsilon < 1$) il existe $A > 0$ tel que $\forall t > A, t^3e^{-\sqrt{t}} < \varepsilon$ et il existe $A' > 0$ tel que $\frac{1}{1+t^2} < \varepsilon$. Soit $\overline{A} = \max(A, A')$. Donc, pour tout $t > \overline{A}$, $\frac{t^3e^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} < \varepsilon^2 < \varepsilon < 1$ donc $\frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} < \frac{1}{t^2}$ pour $t > \overline{A}$. C'est à dire que $\int_{\overline{A}}^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge (car c'est une intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$). Et la fonction $t \mapsto \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}$ est continue sur le fermé borné $[0, \overline{A}]$ donc elle est intégrale (d'intégrale finie) sur $[0, \overline{A}]$. En utilisant la propriété de Chasles : $\displaystyle\int_0^{+\infty} = \underbrace{\int_0^{\overline{A}}}_{\text{conv.}} + \underbrace{\int_{\overline{A}}^{+\infty}}_{\text{conv.}}$ donc convergente.
3. On sait que $\cos^2(x) \leqslant |\cos(x)|^2 \leqslant 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc $\int_0^1 \cos^2(1/t)dt \leqslant \int_0^1 1dt = 1$. Par le principe de comparaison des intégrales positives, on conclut que $\int_0^1 \cos^2(1/t)dt$ est convergente.
4. $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \int_0^1 e^{-t^2}dt + \int_1^{+\infty} e^{-t^2}dt$. La première est une intégrale définie propre et on s'intéresse à la deuxième. En effet, $\forall t \geqslant 1, -t^2 \leqslant -t$ donc $0 \leqslant e^{-t^2} \leqslant e^{-t}$. Et on sait que, $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1/e$ donc ça converge. On en déduit par principe de comparaison que $\int_1^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge aussi.

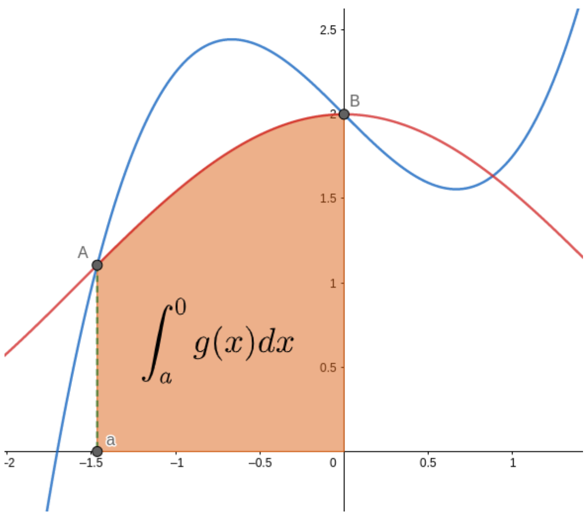
Correction de l'exercice 5 ▲

1. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$

2. Fonction polynomiale continue sur un fermé borné. Somme d'une fonction cos et une constante toutes les deux continues sur un fermé borné donc intégrables.
4. C'est la différence de l'aire au-dessous de f et l'aire au-dessous de g. Donc

$$\int_a^0 f(x)dx - \int_a^0 g(x)dx = \left[x^4 - (1/2)x^2 + 2x\right]_{-1.46}^0 - \left[sin(x) + x\right]_{-1.46}^0 = 3,13... - 2,45... = 0,67..$$





Correction de l'exercice 6 ▲

On a
$$J_n=\int_0^x \frac{t^n e^{1-t}}{n!}dt.$$
alors
$$J_1=\int_0^x te^{1-t}dt.$$
alors en appliquant une intégration par parties : $u=t$ et $v'=e^{1-t}$ donc $u'=1$ et $v=-e^{1-t}$ donc
$$J_1=[-te^{1-t}]_0^x+\int_0^x e^{1-t}dt=[-te^{1-t}]_0^x+[-e^{1-t}]_0^x=-xe^{1-x}-e^{1-x}+e.$$
De même en effectuant une intégrale par parties, choisissant $u=t^n/n$; $v'=e^{1-t}$ donc $u'=t^n/n$ et $v=-e^{1-t}$. Finalement,
$$J_n=[-\frac{t^n}{n}e^{1-t}]_0^x+\int_0^x \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{1-t}dt$$
Donc
$$J_n=\frac{-xe^{1-x}}{n!}+J_{n-1}$$
On exploite ce résultat :
$$\sum_n J_n=\sum \frac{-xe^{1-x}}{n!}+J_{n-1}$$
En simplifiant, on trouve
$$J_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{-x^k}{k!}e^{1-x}+e$$

Correction de l'exercice 7 ▲

1. On a $\frac{1}{2+20\sqrt{x}}\sim^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{x^(1/2)}$ et $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^(1/2)}dx$ diverge (car de type Riemann avec $\alpha=1/2\leqslant 1$). On en déduit par équivalence que $\int_1^{+\infty}\frac{1}{2+20\sqrt{x}}dx$ diverge aussi.
2. Et on a : $\frac{|\sin(x^4)|}{|\sqrt{x}+x^2|}\leqslant\frac{1}{x^2}$ pour tout $x\geqslant 5$. Et $\int_5^{\infty}1/x^2$ converge (car de type Riemann avec $\alpha=2>1$). Donc par comparaison $\int_5^{+\infty}\frac{|\sin(x^4)|}{|\sqrt{x}+x^2|}dx$ est absolument convergente $\implies$ $\frac{\sin(x^4)}{\sqrt{x}+x^2}dx$ est convergente.
