TD n°1 : Analyse Mathématique

SEG - S1 - 2021/2022 - Pr. Hamza El Mahjour

Fonctions d'une variable réelle

Exercice 1

Donner le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

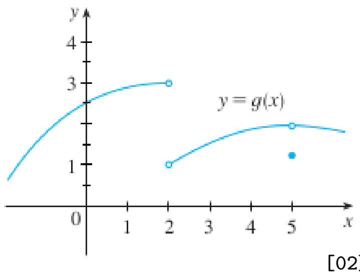
1. $f_1(x) = x^3 + 1$, 2. $f_2(x) = \sqrt{x+3}$,
3. $f_3(x) = Ln(x-2)$, 4. $f_4(x) = Ln(x^2-2)$,
5. $f_5(x) = \dfrac{\sin(x)}{(1+x)(x-\sqrt{3})}$, 6. $f_6(x) = \dfrac{Ln(x-2)}{\sqrt{x-3}}$.

Indication ▼ Correction ▼ [01]

Exercice 2

Observez le graphe de la fonction g ci-contre. Donner à chaque fois la limite (si elle existe !).

a. $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$ b. $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ c. $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$
d. $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$ e. $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$ f. $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$
g. $\lim\limits_{x\to 5^-} g(x)$ h. $\lim\limits_{x\to 5^+} g(x)$ i. $\lim\limits_{x\to 5} g(x)$



Correction ▼ [02]

Exercice 3

Soit f la fonction

$$f(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$$

(a) Donnez le domaine de définition de la fonction.

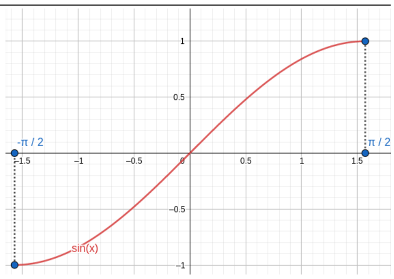
(b) Calculez les limites $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

(c) Interprétez les limites précédentes et tracez (approximativement) le graphe de la fonction au voisinage de 1, $-\infty$ et $+\infty$.

Correction ▼ [03]

Exercice 4

On rappelle que $x \mapsto \arcsin(x)$ est la fonction **réciproque** de $\sin(x)$. La fonction arcsin est définie et continue sur $[-1,1]$.



(a) Calculer $\arcsin(1)$, $\arcsin(-1)$ et $\arcsin(0)$. Tracer approximativement le graphe de $\arcsin(x)$ sur le dessin ci-contre.

(b) Montrer que $\arcsin(x)$ n'est pas dérivable aux points -1^+ et 1^- et que sa dérivée est la fonction $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur l'intervalle $]-1,1[$.

(c) Étudier la fonction $g : x \mapsto \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$: domaine de définition, parité, signes de la dérivée, limites importantes, esquisse du graphe.

Indication ▼ Correction ▼ [04]

Exercice 5

Étudier la fonction $f : x \mapsto x^5 - 5x + 1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ a trois solutions réelles.

Indication ▼ Correction ▼ [05]

Exercice 6

Soit f une fonction n fois dérivable sur $]a,b[$ s'annulant en $n+1$ points de $]a,b[$. Montrer que si $f^{(n)}$ est continue, il existe un point x_0 de $]a,b[$ tel que $f^{(n)}(x_0) = 0$.

Indication ▼ Correction ▼ [06]

Exercice 7

Dans l'application du théorème des accroissements finis à la fonction

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

sur l'intervalle $[a,b]$

1. Préciser le nombre “c” de $]a,b[$.
2. Donner une interprétation géométrique.

Correction ▼ [07]

Indication pour l'exercice 4 ▲

(b) Calculer $\lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$. La dérivée de la réciproque est $(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1})}$.

(c) $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$.

Indication pour l'exercice 5 ▲

Pensez aux limites et au Théorème des valeurs intermédiaires ou Rolle

Indication pour l'exercice 6 ▲

Appliquer Rolle plusieurs fois et à plusieurs ordres de dérivées

Indication pour l'exercice 1 ▲

Correction de l'exercice 1 ▲

1.$D_{f_1} = \mathbb{R}$ car c'est une fonction polynomiale. 2. $D_{f_2} = \{x \in \mathbb{R}, \quad x+3 \geqslant 0\} = \{x \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant -3\} = [-3, +\infty[$. 3.$D_{f_3} = \{x \in \mathbb{R}, \quad x > 2\} =]2, +\infty[$. 4. $D_{f_4} = \left\{x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - 2 > 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}, \quad x^2 > 2\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}, \quad x > \sqrt{2} \text{ ou } x < -\sqrt{2}\right\} =]-\infty, -\sqrt{2}[\bigcup]\sqrt{2}, +\infty[$.

Correction de l'exercice 2 ▲

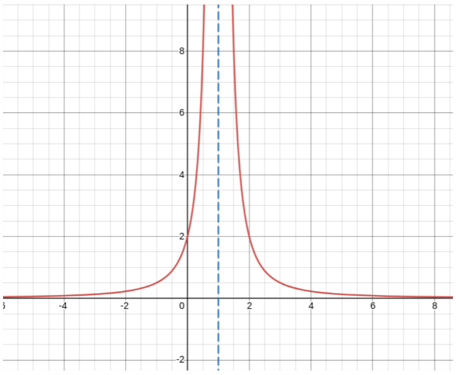
a. $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = 2.5$	b. $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 2.5$	c. $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 2.5$.
d. $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = 3$	e. $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = 1$	f. $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$ n'existe pas
g. $\lim\limits_{x \to 5^-} g(x) = 2$	h. $\lim\limits_{x \to 5^+} g(x) = 2$	i. $\lim\limits_{x \to 5} g(x) = 2 \neq g(2)$ car g est discontinue en ce point.

Correction de l'exercice 3 ▲

(a) $D_f = \left\{x \in \mathbb{R}, \quad (x-1)^2 \neq 0\right\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

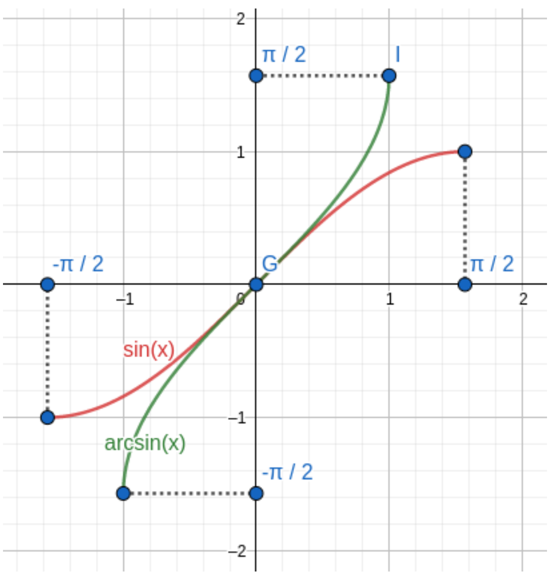
(b) $\lim\limits_{x \to 1^-} = \dfrac{2}{(0^-)^2} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty = \lim\limits_{x \to 1^+}$. Et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} = \dfrac{2}{+\infty} = 0$.

(c) f admet une asymptote d'équation $x = 1$ verticale à droite et à gauche de 1. f admet une asymptote horizontale au voisinage de $\pm\infty$.



Correction de l'exercice 4 ▲

(a) On $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$, $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ et $\arcsin(0) = 0$.



(b) D'abord on utilise la définition de la dérivée au point -1 à droite. On a

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{\arcsin(x)-\arcsin(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{\arcsin(x)+\frac{\pi}{2}}{x+1}.$$

On pose $u = sin(x)$ alors $x \to -1^+ \implies u \to -\frac{\pi}{2}^+$. Donc

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{\arcsin(x)+\frac{\pi}{2}}{x+1} = \lim_{u\to -\frac{\pi}{2}^+} \frac{\arcsin(sin(x)+\frac{\pi}{2}}{\sin(u)+1}$$

Posons maintenant $y = \frac{pi}{2}+u$, alors $u \to -\frac{pi}{2}^+ \implies y = 0^+$ et

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to -\frac{\pi}{2}^+} \frac{\arcsin(\sin(x))+\frac{\pi}{2}}{\sin(u)+1} &= \lim_{y\to 0^+} \frac{y}{1+\sin(y-\frac{pi}{2})} \\
&= \lim_{y\to 0^+} \frac{y}{1-\cos(y)}, \\
&= \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{\frac{1-\cos(y)}{y}}, \\
&= \frac{1}{0^+} \\
&= +\infty,
\end{aligned}$$

car $\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0^+$. Donc $\arcsin(x)$ n'est pas dérivable en -1^+. De même pour 1^-. La dérivée sur $]-1,1[$ est

$$\arcsin'(x) = (\sin^{-1})'(x) = \frac{1}{\sin'(\sin^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

On pose $\theta = \arcsin(x)$. On sait que $\sin(\theta)^2+\cos(\theta)^2 = 1$, donc $\cos(\theta) = \sqrt{1-\sin(\theta)^2}$ Alors

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin(\theta)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin(\arcsin(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(c) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(1+x)^2 \geqslant 0 \implies 1+x^2 \geqslant -2x$ et $(1-x)^2 \geqslant 0 \implies 1+x^2 \geqslant 2x$. Donc $-(x^2+1) \leqslant 2x \leqslant x^2+1$ alors $-1 \leqslant \frac{2x}{x^2+1} \leqslant 1$. Donc la fonction $x \mapsto \frac{2x}{x^2+1}$ va de $\mathbb{R}$ vers $[-1,1]$, et elle est composée avec $x \mapsto \arcsin(x)$ qui est définie sur $[-1,1]$ vers $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Donc g est définie de $\mathbb{R}$ dans $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Elle est continue comme composée de deux fonctions continues. g est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. Sa dérivée est

$$\frac{2}{1+x^2}\frac{1-x}{\sqrt{(1-x^2)^2}} = \frac{2}{1+x^2}\frac{1-x}{|1-x^2|}.$$

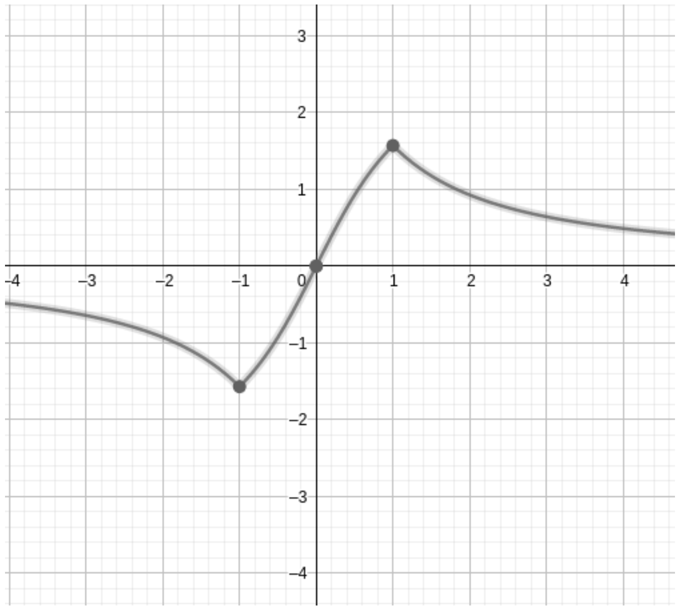
Notons que la fonction g est impaire car c'est une composée de deux fonctions impaires. Donc il suffit de l'étudier sur $[0,\infty]$. Donc la dérivée de g est

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{1+x^2} > 0 & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ \\ -\dfrac{2}{1+x^2} < 0 & \text{si} \quad x \in]1,+\infty[\end{cases}$$

Par conséquent, g est strictement croissante sur $[0,1[$ (et aussi $]-1,0]$) et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$ (et aussi $]-\infty,1[$). De plus. On a $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$, $\lim_{x\to+1^-} g(x) = -\lim_{x\to-1^+} g(x) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\lim_{x\to 0^-} g(x) = 0$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	2	$+$	$+1 \| -1$	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\pi/2$	$\searrow$	0

En plus,



Correction de l'exercice 5 ▲

D'abord on a $lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^5 = +\infty$ et $lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^5 = -\infty$. Donc il existe $A < 0$ assez petit et $B > 0$ assez grand tels que $f(A) < 0$ et $f(B) > 0$. De plus, $f'(x) = 5x^4 - 5$ donc $f'(x) = 0 \iff x = -1$ ou $x = 1$. Donc, $f'(x) < 0$ si $x \in]-1,1[$ et $f'(x) > 0$ si $x \in]-\infty,-1[\bigcup]1,+\infty[$. Et on a donc le tableau suivant

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	8	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

On applique alors le théorème des valeurs intermédiaires sur $[A,-1]$, $[-1,1]$ et $[1,B]$. Avec $f(A) \cdot f(-1) < 0$, $f(-1) \cdot f(1) < 0$ et $f(1) \cdot f(B) < 0$. Et puisque sur chacun des intervalles précédents la fonction est **strictement monotone**, il existe alors d'**uniques** $x_0 \in]A,-1[, x_1 \in]-1,1[$ et $x_2 \in]1,B[$ tels que $f(x_0) = f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Correction de l'exercice 6 ▲

Puisque f est dérivable n fois donc toutes ses fonctions dérivées jusqu'à $f^{(n-1)}$ sont continues. De plus, f s'annule $n+1$ fois donc il existe $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ tels que $f(x_1) = f(x_2) = \ldots = f(x_{n+1}) = 0$. On a $f(x_1) = f(x_2)$ alors par le théorème de Rolle $\exists c_{1,1} \in]x_1, x_2[$ tel que $f'(c_{1,1}) = 0$. On répète le même processus pour trouver que $f'(c_{1,2}) = 0$, $f'(c_{1,3}) = 0 \dots f'(c_{1,n}) = 0$. Alors de la même façon nous allons appliquer le théorème de Rolle avec la dérivée de f' c'est à dire $f^{(2)}$. On donne un exemple de la procédure ; on a $f'(c_{1,1}) = f'(c_{1,2})$ donc par le théorème de Rolle, il existe $c_{2,1} \in [c_{1,1}, c_{1,2}]$ tel que $(f'(c_{2,1}))' = f^{(2)}(c_{2,1}) = 0$. Comme ça, en répétant, on trouvera $f^{(2)}(c_{2,1}) = f^{(2)}(c_{2,2}) = f^{(2)}(c_{2,3}) = \dots = f^{(2)}(c_{n-1,2}) = 0$. On reprenant la même idée pour les dérivées supérieur on aboutira à la fin à un nombre $c_{1,n} \in [c_{1,n}, c_{2,n}]$ tel que $f^{(n)}(c_{1,n}) = 0$.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $[a,b]$. Le théorème des accroissement finis assure l'existence d'un nombre $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$. Mais pour la fonction particulière de cet exercice nous pouvons expliciter ce c. En effet $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ implique $\alpha(b^2 - a^2) + \beta(b-a) = (2\alpha c + \beta)(b-a)$. Donc $c = \frac{a+b}{2}$.
2. Géométriquement, le graphe $\mathscr{P}$ de f est une parabole. Si l'on prend deux points $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$ appartenant à cette parabole, alors la droite (AB) est parallèle à la tangente en $\mathscr{P}$ qui passe en $M = (\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$. L'abscisse de M étant le milieu des abscisses de A et B.
