TD n°1 : Analyse Mathématique

SEG - S1 - 2022/2023 - Pr. Hamza El Mahjour

Fonctions réelles : Limites, dérivées , Rolle et TAF

Exercice 1

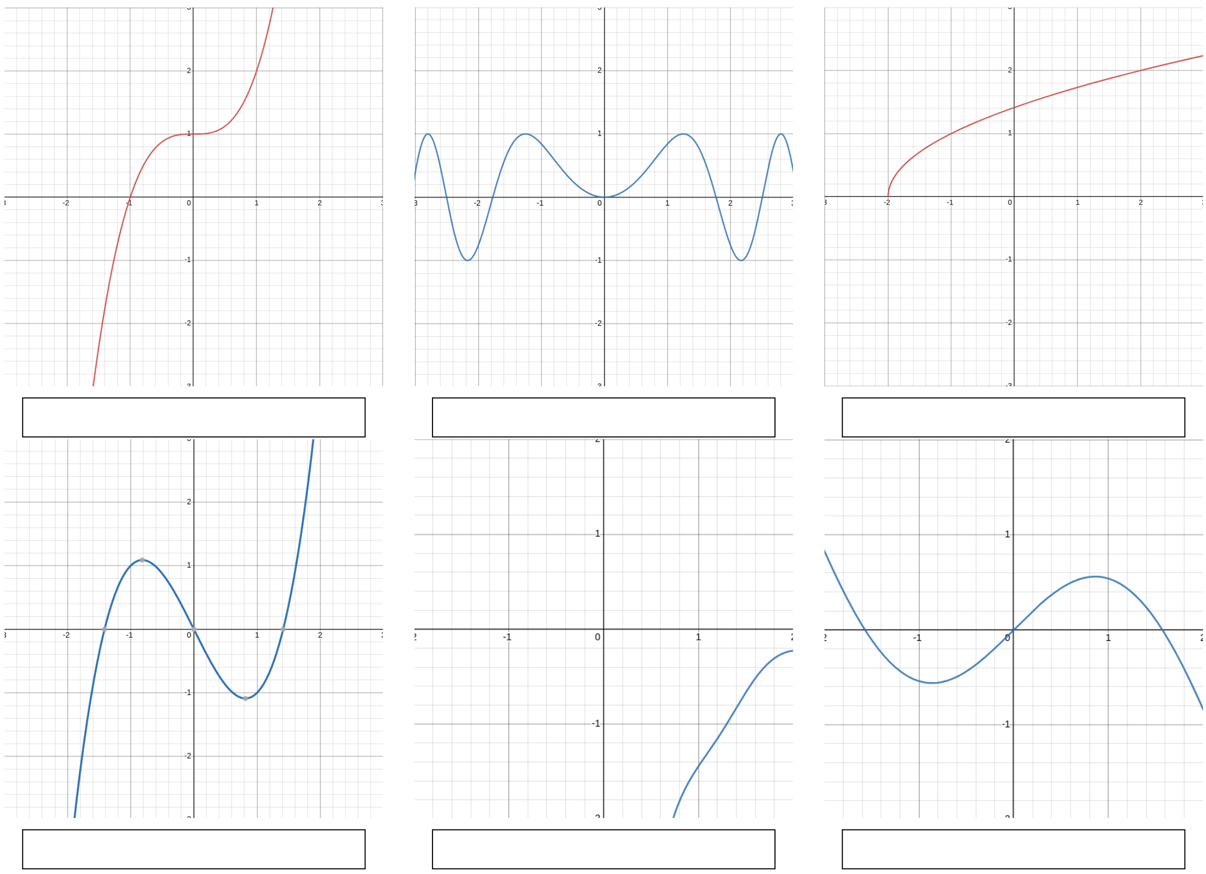
Donner le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = Ln(x+1)$,
2. $f_2(x) = \sqrt{x-3}$,
3. $f_3(x) = (x-2)^2(x+\sqrt{2})$,
4. $f_4(x) = \sqrt{-x^2+3x+1}$,
5. $f_5(x) = \dfrac{\sin(x)}{(1+x)(x-\sqrt{3})}$,
6. $f_6(x) = \dfrac{1}{x^2-4x-1}$,
7. $f_7(x) = \frac{x}{\cos(x)}$.

[01]

Exercice 2

Dites, à partir de chaque graphe $\mathscr{C}_f$, si les fonctions qui sont inversibles et dessiner ensuite le graphe de leurs fonctions inverses $\mathscr{C}_{f^{-1}}$.



[03]

Exercice 3

Soit f la fonction
$$f(x) = \frac{3x-1}{(x-\sqrt{3})^2} + 2.$$

(a) Calculez les limites $\lim_{x\to\sqrt{3}^-} f(x)$, $\lim_{x\to\sqrt{3}^+} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

(c) Interprétez les limites précédentes et tracez (approximativement) le graphe de la fonction au voisinage de $\sqrt{3}$, $-\infty$ et $+\infty$.

[03]

Exercice 4

Dérivez les fonctions suivantes :

$h_1(x) = 3x^2 + 2x$	$h_2(x) = x^4 \sin(x) + 1$	$h_3(x) = \cos(4x^2) - x$
$h_4(x) = x\log(x) + \exp(-3x+1)$	$h_5(x) = \frac{1}{\arctan(x-1)}$	$h_6(x) = \frac{-1}{x+1} + 8x + 2$

[04]

Exercice 5

Soit la fonction $f(x) = \sin(x)e^x$.

1. Justifier pourquoi f est continue.
2. Donner le signe des deux valeurs $f(-\pi/4)$ et $f(\pi/2)$ (sans calculer de façon précise).
3. En déduire que f admet un zéro sur l'intervalle $]-\pi/4, \pi/2[$.

En utilisant les techniques précédentes, l'étude des limites en $\pm\infty$ et de la monotonie, étudier la fonction $p : x \mapsto x^5 - 5x + 1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ admet trois solutions réelles.

[05]

Exercice 6

Soit f une fonction n fois dérivable sur $]a,b[$ s'annulant en $n+1$ points de $]a,b[$. Montrer que si $f^{(n)}$ est continue, il existe un point x_0 de $]a,b[$ tel que $f^{(n)}(x_0) = 0$.

[06]

Exercice 7

On veut montrer, grâce au théorème des accroissements finis, que :
$$\forall x > 0, \qquad \frac{1}{x+1} < ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}.$$

Pour celà on passera par les étapes suivantes.

1. Appliquer le T.A.F sur la fonction $x \mapsto ln(x)$ sur l'intervalle $]x, x+1[$ pour $x > 0$.
2. Utiliser le résultat précédent et le fait que $c \in]x, x+1[\Longrightarrow \frac{1}{c} \in]\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x}[$ pour en déduire le résultat demandé.

[07]