TD n°2 : Mathématiques

SG - S1 - 2023/2024 - Pr. Hamza El Mahjour

Fonctions à plusieurs variables et optimisation

Exercice 1

Soit $f_1(x,y) = xy + x^2 - y^2$ une fonction.

(a) Donner D_{f_1} le domaine de définition de f_1.

(b) Calculer $f_1(2,2)$ et $f_1(1,-1)$.

Soit $f_2(x,y) = \dfrac{\sqrt{|x|-2}}{\ln\left(|y|-\frac{1}{2}\right)}$

(c) Donner D_{f_2} le domaine de définition de f_2.

(d) Représenter graphiquement D_{f_2} sur un plan.

[01]

$$f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{3} - x^2 + y^2 - 1$$

(a) Calculer $f(1,-1)$ et $f(0,2)$.

(b) Donner le gradient et la matrice Hessienne de f

(c) Trouver les points critiques et étudier leur nature (minimum local, maximum local, point selle)

Indication ▼ [02]

Exercice 2

Trouver les points les points critiques de la fonction suivante et déterminer si ce sont des minima locaux, des maxima locaux ou des points selle.

$$g(x,y) = \sin x + y^2 - 2y + 1.$$

[03]

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1,1[$ avec telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Soit $F :]-1,1[^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $F(x,y) = f(x)f(y)$.

(a) Montrer que F n'admet pas d'extremum relatif en $(0,0)$.

(b) Étudier si $(0,0)$ est un point critique.

[04]

Exercice 4

Trouver les extremas de la fonction $f(x_1,x_2) = x_1x_2$ sous la contrainte $x_1^2 + x_2^2 = 5$. [05]

Exercice 5

Une usine de fabrication produit des boîtes (5) de forme parallélépipède de volume 32 dm^3. Les dimensions de cette boîte sont x, y et z. En tant que chef de production, on vous a demandé de minimiser la surface de carton utilisé pour produire ces boîtes.

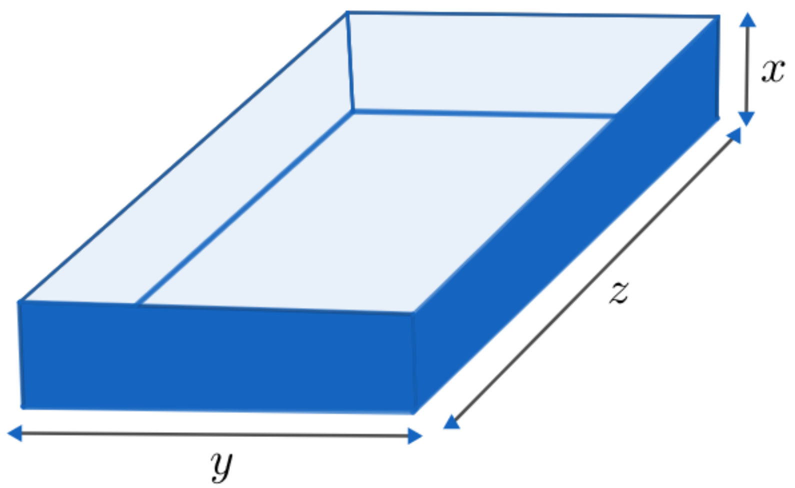

FIGURE 1 – Boîte sans couvercle.

Indication ▼ [06]

Indication pour l'exercice ?? ▲

Il y a quatres points critiques : deux points selles, un minium local et un maximum local.

Indication pour l'exercice 5 ▲

- Exprimer la surface latérale et le volume de la boîte en fonction de x, y et z.
- Notez que la boîte n'a pas la face supérieure.