



TD n°1 : Mathématiques

SEG - S1 - 2023/2024 - Pr. Hamza El Mahjour

Les fonctions à une seule variable

Exercice 1

On considère la fonction f d'une variable réelle définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- (a) Déterminez l'ensemble de définition de f
- (b) Calculer la limite de f quand x tend vers 0; f est-elle continue en 0?

[01]

Exercice 2

Un agent immobilier perçoit des frais de location de la façon suivante : 14% pour un loyer jusqu'à 3000 Dhs, 10% sur la tranche de loyer entre 3000 à 3500 Dhs, 6% sur la tranche entre 3500 et 7000 Dhs et 4% au-delà de 7000 Dhs.

- (a) Écrire la fonction qui donne le montant des frais perçus en fonction du loyer.
- (b) Étudier la continuité de cette fonction.

[02]

Exercice 3

- (a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^r} = +\infty$ pour $a > 1$ et $r > 0$.
- (b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)\ln(x+1) - x\ln(x)}{\ln(x)}$.

[03]

Exercice 4 La règle¹ de l'Hôpital

Soit f et g deux fonctions dérivables sur l'intervalle $I =]a - \alpha, a + \alpha$, $\alpha > 0$ et telles que $f(a) = g(a) = 0$.

- (a) Peut-on calculer directement $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$?

1. Règle due à Guillaume François Antoine de l'Hôpital. Vous pouvez utiliser le résultat de cet exercice dans el future snas le démontrer.

(b) Soit $x \in I, x \neq a$. On considère la fonction

$$\begin{aligned} \phi : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \phi(t) = g(x)f(t) - f(x)g(t) \end{aligned}$$

Calculer $\phi(x)$ et $\phi(a)$. En déduire, qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $\phi'(a + \theta(x - a)) = 0$.

(c) Calculer $\phi'(t)$. Déduire de la question précédente que pour tout $x \in I, x \neq a$, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

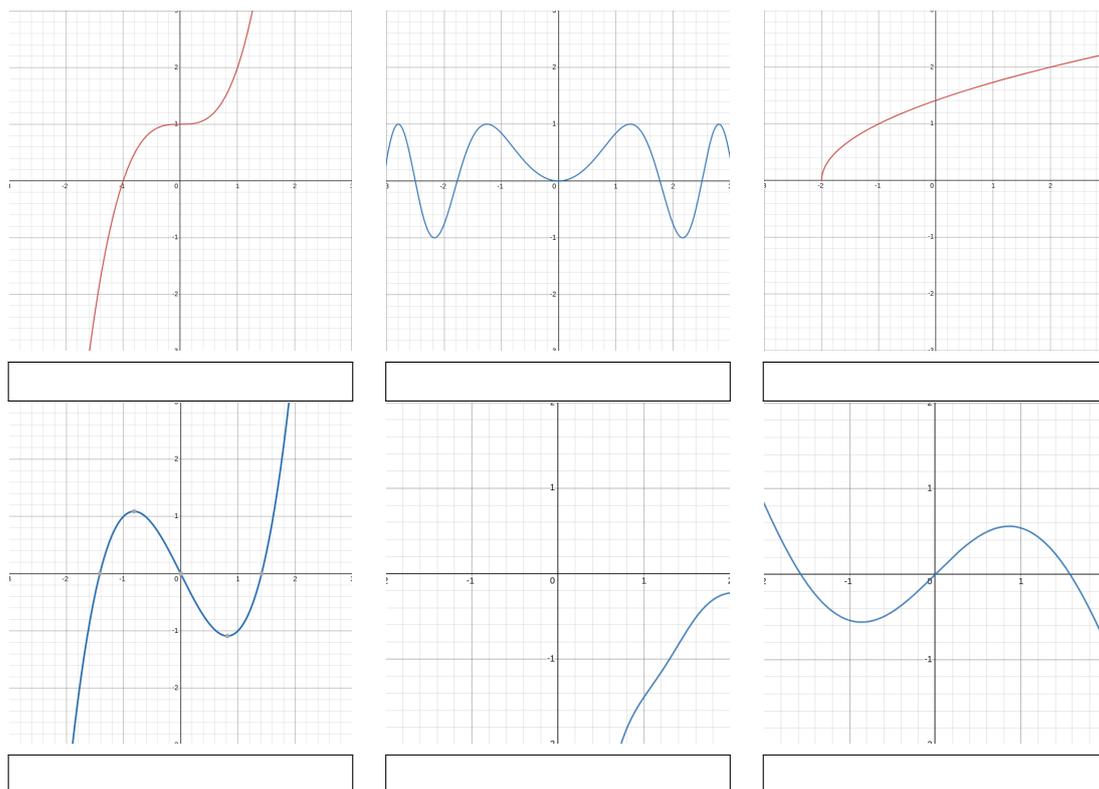
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a + \theta(x - a))}{g'(a + \theta(x - a))}$$

(d) On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = u$ et $\lim_{x \rightarrow a} g'(x) = v \neq 0$. Déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

[04]

Exercice 5

Dites, à partir de chaque graphe \mathcal{C}_f , si les fonctions qui sont inversibles et dessiner ensuite le graphe de leurs fonctions inverses $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.



[05]

Exercice 6

Faites l'étude complète de la fonction $f(x) = x^2(x - 5)^3$ en traçant à la fin le croquis de son graphe. Les étapes à respecter sont les suivantes : 0) Domaine D_f , 1) Symétrie, 2) intersections avec les axes y et x , 3) asymptotes verticales, 4) signes de la fonction, 5) asymptotes horizontales, 6) dérivée et son signe, 7) maxima et minima, 8) dérivée seconde et son signe, 9) points d'inflexion.

[06]