TD1 - CORRIGE (source :exo7.emath.fr) [Consulter la source pour plus d'exercices]

Exercice 1

Donc l'étude de la limite de f en 0 est la même que celle de la fonction $x \mapsto x^{m-n}$.
Distinguons plusieurs cas pour la limite de f en 0.

- Si $m > n$ alors x^{m-n}, et donc $f(x)$, tendent vers 0.
- Si $m = n$ alors x^{m-n} et $f(x)$ tendent vers 1.

- Si $m < n$ alors $x^{m-n} = \frac{1}{x^{n-m}} = \frac{1}{x^k}$ avec $k = n - m$ un exposant positif. Si k est pair alors les limites à droite et à gauche de $\frac{1}{x^k}$ sont $+\infty$. Pour k impair la limite à droite vaut $+\infty$ et la limite à gauche vaut $-\infty$. Conclusion pour $k = n - m > 0$ pair, la limite de f en 0 vaut $+\infty$ et pour $k = n - m > 0$ impair f *n'a pas de limite en* 0 car les limites à droite et à gauche ne sont pas égales.

Correction 4. Généralement pour calculer des limites faisant intervenir des sommes de racines carrées, il est utile de faire intervenir "l'expression conjuguée":

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

Les racines au numérateur ont "disparu" en utilisant l'identité $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$.
Appliquons ceci sur un exemple :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n} \\ &= \frac{(\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m})(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m})}{x^n(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m})} \\ &= \frac{1 + x^m - (1 - x^m)}{x^n(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m})} \\ &= \frac{2x^m}{x^n(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m})} \\ &= \frac{2x^{m-n}}{\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m}} \end{aligned}$$

Et nous avons

$$\lim_{x \to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m}} = 1.$$

Exercice 2 :

7. Nous avons l'égalité $a^3 - 1 = (a-1)(1+a+a^2)$. Pour $a = \sqrt[3]{1+x^2}$ cela donne :

$$\frac{a-1}{x^2} = \frac{a^3-1}{x^2(1+a+a^2)} = \frac{1+x^2-1}{x^2(1+a+a^2)} = \frac{1}{1+a+a^2}.$$

Lors que $x \to 0$, alors $a \to 1$ et la limite cherchée est $\frac{1}{3}$.

Autre méthode : si l'on sait que la limite d'un taux d'accroissement correspond à la dérivée nous avons une méthode moins astucieuse. Rappel (ou anticipation sur un prochain chapitre) : pour une fonction f dérivable en a alors

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a).$$

Pour la fonction $f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$ ayant $f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}$ cela donne en $a = 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = \frac{1}{3}.$$

8. $\frac{x^n-1}{x-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$. Donc si $x \to 1$ la limite de $\frac{x^n-1}{x-1}$ est n. Donc la limite de $\frac{x-1}{x^n-1}$ en 1 est $\frac{1}{n}$.

La méthode avec le taux d'accroissement fonctionne aussi très bien ici. Soit $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$ et $a = 1$. Alors $\frac{x^n-1}{x-1} = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ tend vers $f'(1) = n$.

Correction 11. 1. $\frac{x^2+2|x|}{x} = x + 2\frac{|x|}{x}$. Si $x > 0$ cette expression vaut $x+2$ donc la limite à droite en $x = 0$ est $+2$. Si $x < 0$ l'expression vaut -2 donc la limite à gauche en $x = 0$ est -2. Les limites à droite et à gauche sont différentes donc il n'y a pas de limite en $x = 0$.

2. $\frac{x^2+2|x|}{x} = x + 2\frac{|x|}{x} = x - 2$ pour $x < 0$. Donc la limite quand $x \to -\infty$ est $-\infty$.

3. $\frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{x+2}{x-1}$, lorsque $x \to 2$ cette expression tend vers 4.

4. $\frac{\sin^2 x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x} = 1 - \cos x$. Lorsque $x \to \pi$ la limite est donc 2.

5. $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} \times \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+x-(1+x^2)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})} = \frac{x-x^2}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})} = \frac{1-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}$.
Lorsque $x \to 0$ la limite vaut $\frac{1}{2}$.

6. $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = \left(\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}\right) \times \frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}} = \frac{x+5-(x-3)}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}} = \frac{8}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}$. Lorsque $x \to +\infty$, la limite vaut 0.

Exercice 3:

3. Le graphe devrait vous aider : tout d'abord il vous aide à se convaincre que f est bien bijective et que la formule pour la bijection réciproque dépend d'intervalles. Petit rappel : le graphe de la bijection réciproque f^{-1} s'obtient comme symétrique du graphe de f par rapport à la bissectrice d'équation $(y = x)$ (dans un repère orthonormal).

   Ici on se contente de donner directement la formule de f^{-1}. Pour $x \in]-\infty, 1[$, $f(x) = x$. Donc la bijection réciproque est définie par $f^{-1}(y) = y$ pour tout $y \in]-\infty, 1[$. Pour $x \in [1, 4]$, $f(x) = x^2$. L'image de l'intervalle $[1, 4]$ est l'intervalle $[1, 16]$. Donc pour chaque $y \in [1, 16]$, la bijection réciproque est définie par $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Enfin pour $x \in]4, +\infty[$, $f(x) = 8\sqrt{x}$. L'image de l'intervalle $]4, +\infty[$ est donc $]16, +\infty[$ et f^{-1} est définie par $f^{-1}(y) = \frac{1}{64}y^2$ pour chaque $y \in]16, +\infty[$.

   Nous avons définie $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de telle sorte que f^{-1} soit la bijection réciproque de f.

   C'est un bon exercice de montrer que f est bijective sans calculer f^{-1} : vous pouvez par exemple montrer que f est injective et surjective. Un autre argument est d'utiliser un résultat du cours : f est continue, strictement croissante avec une limite $-\infty$ en$-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$ donc elle est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (et on sait même que la bijection réciproque est continue).

Correction 66.

1. Le graphe est composé d'une portion de droite au dessus des $x \in]-\infty, 1[$; d'une portion de parabole pour les $x \in [1, 4]$, d'une portion d'une autre parabole pour les $x \in]4, +\infty$. (Cette dernière branche est bien une parabole, mais elle n'est pas dans le sens "habituel", en effet si $y = 8\sqrt{x}$ alors $y^2 = 64x$ et c'est bien l'équation d'une parabole.)

   On "voit" immédiatemment sur le graphe que la fonction est continue (les portions se recollent !). On "voit" aussi que la fonction est bijective.

2. La fonction est continue sur $]-\infty, 1[$, $]1, 4[$ et $]4, +\infty[$ car sur chacun des ces intervalles elle y est définie par une fonction continue. Il faut examiner ce qui se passe en $x = 1$ et $x = 4$. Pour $x < 1$, $f(x) = x$, donc la limite à gauche (c'est-à-dire $x \to 1$ avec $x < 1$) est donc $+1$. Pour $x \geqslant 1$, $f(x) = x^2$ donc la limite à droite vaut aussi $+1$. Comme on a $f(1) = +1$ alors les limites à gauche, à droite et la valeur en 1 coïncident donc f est continue en $x = 1$.

   Même travail en $x = 4$. Pour $x \in [1, 4]$, $f(x) = x^2$ donc la limite à gauche en $x = 4$ est $+16$. On a aussi $f(4) = +16$. Enfin pour $x > 4$, $f(x) = 8\sqrt{x}$, donc la limite à droite en $x = 4$ est aussi $+16$. Ainsi f est continue en $x = 4$.

   Conclusion : f est continue en tout point $x \in \mathbb{R}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 :

Correction 1.

1. $\ln(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o\left(x^6\right)$.
2. $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o\left(x^7\right)$.
3. $\sin(\tan x) = x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{55}{1008}x^7 + o\left(x^7\right)$.
4. $(\ln(1+x))^2 = x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o\left(x^4\right)$.
5. $\exp(\sin x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^3\right)$.
6. $\sin^6 x = x^6 + o\left(x^6\right)$.

Exercice 5 :

Maintenant pour le dl de la forme $\ln(a+v)$ en $v=0$ on se ramène au dl de $\ln(1+v)$ ainsi :

$$\ln(a+v) = \ln\left(a(1+\frac{v}{a})\right) = \ln a + \ln(1+\frac{v}{a}) = \ln a + \frac{v}{a} - \frac{1}{2}\frac{v^2}{a^2} + \frac{1}{3}\frac{v^3}{a^3} + o(v^3)$$

On applique ceci à $h(x) = \ln(\sin x)$ en posant toujours $u = x - \frac{\pi}{3}$:

$$\begin{aligned}
h(x) = \ln(\sin x) &= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}u - \frac{\sqrt{3}}{4}u^2 - \frac{1}{12}u^3 + o(u^3)\right) \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}u - \frac{\sqrt{3}}{4}u^2 - \frac{1}{12}u^3 + o(u^3)\right)\right) \\
&= \cdots \qquad \text{on effectue le dl du } \ln \text{ et on regroupe les termes} \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}u - \frac{2}{3}u^2 + \frac{4}{9\sqrt{3}}u^3 + o(u^3) \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}(x-\frac{\pi}{3}) - \frac{2}{3}(x-\frac{\pi}{3})^2 + \frac{4}{9\sqrt{3}}(x-\frac{\pi}{3})^3 + o((x-\frac{\pi}{3})^3)
\end{aligned}$$

On trouve donc :

$$\ln(\sin x) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}(x-\frac{\pi}{3}) - \frac{2}{3}(x-\frac{\pi}{3})^2 + \frac{4}{9\sqrt{3}}(x-\frac{\pi}{3})^3 + o((x-\frac{\pi}{3})^3)$$

Bien sûr une autre méthode consiste à calculer $h(1)$, $h'(1)$, $h''(1)$ et $h'''(1)$.

3. Posons $u = x - \frac{\pi}{3}$ (et donc $x = \frac{\pi}{3} + u$). Alors

$$\sin(x) = \sin(\frac{\pi}{3}+u) = \sin(\frac{\pi}{3})\cos(u) + \sin(u)\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos u + \frac{1}{2}\sin u$$

On connait les dl de $\sin u$ et $\cos u$ autour de $u=0$ (car on cherche un dl autour de $x = \frac{\pi}{3}$) donc

$$\begin{aligned}
\sin x &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos u + \frac{1}{2}\sin u \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{1}{2!}u^2 + o(u^3)\right) + \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{3!}u^3 + o(u^3)\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}u - \frac{\sqrt{3}}{4}u^2 - \frac{1}{12}u^3 + o(u^3) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{4}(x-\frac{\pi}{3})^2 - \frac{1}{12}(x-\frac{\pi}{3})^3 + o((x-\frac{\pi}{3})^3)
\end{aligned}$$

2. La première méthode consiste à calculer $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \exp \sqrt{x}$, $g''(x)$, $g'''(x)$ puis $g(1)$, $g'(1)$, $g''(1)$, $g'''(1)$ pour pouvoir appliquer la formule de Taylor conduisant à :
$$\exp(\sqrt{x}) = e + \frac{e}{2}(x-1) + \frac{e}{48}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$
(avec $e = \exp(1)$).

Autre méthode. Commencer par calculer le dl de $k(x) = \exp x$ en $x = 1$ ce qui est très facile car pour tout n, $k^{(n)}(x) = \exp x$ et donc $k^{(n)}(1) = e$:
$$\exp x = e + e(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \frac{e}{3!}(x-1)^3 + o((x-1)^3).$$
Pour obtenir le dl $g(x) = h(\sqrt{x})$ en $x = 1$ on écrit d'abord :
$$\exp(\sqrt{x}) = e + e(\sqrt{x}-1) + \frac{e}{2!}(\sqrt{x}-1)^2 + \frac{e}{3!}(\sqrt{x}-1)^3 + o((\sqrt{x}-1)^3).$$
Il reste alors à substituer $\sqrt{x}$ par son dl obtenu dans la première question.

Indications 7. Pour la première question vous pouvez appliquer la formule de Taylor ou bien poser $h = x - 1$ et considérer un dl au voisinage de $h = 0$.

Correction 7. 1. Première méthode. On applique la formule de Taylor (autour du point $x = 1$)
$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$
Comme $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ alors $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ et donc $f'(1) = \frac{1}{2}$. Ensuite on calcule $f''(x)$ (puis $f''(1)$), $f'''(x)$ (et enfin $f'''(1)$).

On trouve le dl de $f(x) = \sqrt{x}$ au voisinage de $x = 1$:
$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

Deuxième méthode. Posons $h = x - 1$ (et donc $x = h + 1$). On applique la formule du dl de $\sqrt{1+h}$ autour de $h = 0$.
$$\begin{aligned} f(x) = \sqrt{x} &= \sqrt{1+h} \\ &= 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{16}h^3 + o(h^3) \quad \text{c'est la formule du dl de } \sqrt{1+h} \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 + o((x-1)^3) \end{aligned}$$

Source : bibmath.net (consulter la source pour plus d'exercices)

Exercice 6 :

1. On reconnait que $f(x)=\frac{1}{2}\times\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x)=1+x^2>0$. Les primitives de f sont donc les fonctions de la forme $x\mapsto\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$, $C\in\mathbb{R}$.
2. On reconnait que $g(x)=\frac{1}{3}\times\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x)=1+e^{3x}>0$. Les primitives de g sont donc les fonctions de la forme $x\mapsto\frac{1}{3}\ln(1+e^{3x})+C$, $C\in\mathbb{R}$.
3. On reconnait que $h(x)=u'(x)\times u(x)$, avec $u(x)=\ln x$. Les primitives de h sont donc les fonctions de la forme $x\mapsto\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$, $C\in\mathbb{R}$. Remarquons que de telles fonctions ne sont définies que sur $]0,+\infty[$.
4. On reconnait que $k(x)=u'(x)(u(x))^2$, avec $u(x)=\sin x$. Les primitives de k sont donc les fonctions $x\mapsto\frac{1}{3}(\sin x)^3+C$, $C\in\mathbb{R}$.
5. En écrivant $l(x)=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$, on reconnait que $l(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x)=\ln(x)$. Les primitives de cette fonction, sur l'intervalle $]1,+\infty[$, sont les fonctions de la forme $x\mapsto\ln(\ln x)+C$, $C\in\mathbb{R}$.
6. On reconnait que $m(x)=\frac{3}{2}u'(x)\sqrt{u(x)}$, avec $u(x)=1+x^2$. Les primitives de m sont donc les fonctions de la forme $x\mapsto(1+x^2)^{3/2}+C$, $C\in\mathbb{R}$.

Exercice 7 :

2. On intègre par parties en posant :

$$\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & \sin(x) & \qquad & u'(x) & = & \cos(x) \\ v'(x) & = & e^x & & v(x) & = & e^x. \end{array}$$

On obtient

$$\int_0^\pi e^x \sin(x)dx = [\sin(x)e^x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos(x)dx = -\int_0^\pi \cos(x)dx.$$

On intègre à nouveau par parties en posant :

$$\begin{array}{rclcrcl} u_1(x) & = & \cos(x) & \qquad & u_1'(x) & = & -\sin(x) \\ v_1'(x) & = & e^x & & v_1(x) & = & e^x. \end{array}$$

On obtient

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^x \sin(x)dx &= -[\cos(x)e^x]_0^\pi + \int_0^\pi e^x(-\sin(x))dx \\ &= e^\pi + 1 - \int_0^\pi e^x(\sin(x))dx. \end{aligned}$$

On en déduit

$$2\int_0^\pi e^x \sin(x)dx = e^\pi + 1 \iff \int_0^\pi e^x \sin(x) = \frac{e^\pi + 1}{2}.$$

1. On intègre par parties en posant :

$$\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & \ln(x) & \qquad & u'(x) & = & \frac{1}{x} \\ v'(x) & = & \frac{1}{x} & & v(x) & = & \ln(x). \end{array}$$

On obtient

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\ln(x)}{x} dx &= \left[(\ln(x))^2\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{\ln(x)}{x} dx \\ &= (\ln 2)^2 - \int_1^2 \frac{\ln(x)}{x} dx. \end{aligned}$$

On pourrait croire que cela ne sert à rien puisqu'on retombe sur la même intégrale, mais tout fonctionne bien car cette égalité devient

$$2\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x} dx = (\ln(2))^2 \iff \int_1^2 \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{1}{2}(\ln(2))^2.$$

On intègre une deuxième fois par parties en posant

$$\begin{array}{rclcrcl} u_1(x) & = & \cos(\ln x) & \qquad & u_1'(x) & = & -\frac{1}{x}\sin(\ln x) \\ v_1'(x) & = & 1 & & v_1(x) & = & x \end{array}$$

de sorte que

$$\int \cos(\ln x)dx = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x).$$

En mettant tout cela ensemble, on trouve

$$\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)$$

soit

$$\int \sin(\ln x)dx = \frac{x}{2}\big(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\big).$$

de sorte que

$$\int (\ln t)^2 dt = x(\ln x)^2 - 2\int \ln t dt.$$

Une primitive de $x \mapsto \ln x$ étant $x \mapsto x\ln x - x$ (résultat qui se retrouve en intégrant par parties), on trouve finalement qu'une primitive de $x \mapsto (\ln x)^2$ est

$$x \mapsto x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x.$$

3. On va intégrer par parties deux fois. On travaille sur l'intervalle $]0, +\infty[$, là où la fonction est bien définie et continue. On pose alors :

$$\begin{array}{rclrcl} u(x) & = & \sin(\ln x) & u'(x) & = & \frac{1}{x}\cos(\ln x) \\ v'(x) & = & 1 & v(x) & = & x \end{array}$$

de sorte que

$$\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x).$$

1. La fonction $x \mapsto \arctan x$ étant continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une primitive sur cet intervalle. On intègre par parties en posant :

$$\begin{array}{rclrcl} u(x) & = & \arctan x & u'(x) & = & \frac{1}{x^2+1} \\ v'(x) & = & 1 & v(x) & = & x \end{array}$$

de sorte que

$$\int \arctan t dt = x\arctan x - \int \frac{t}{t^2+1}dt.$$

La primitive que l'on doit encore rechercher est de la forme g'/g, et donc

$$\int \arctan t dt = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1).$$

2. La fonction $x \mapsto (\ln x)^2$ étant continue sur $]0, +\infty[$, elle admet des primitives sur cet intervalle. On se restreint à cet intervalle et on intègre par parties en posant :

$$\begin{array}{rclrcl} u(x) & = & (\ln x)^2 & u'(x) & = & 2\frac{\ln x}{x} \\ v'(x) & = & 1 & v(x) & = & x \end{array}$$

Exercice 8 :

Autrement dit, $e^{-x^2} = o(1/x^2)$. Ainsi, puisque $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge, il en est de même de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

3. Là encore, on va majorer, et on va même prouver que l'intégrale est absolument convergente. Pour cela, on remarque que, pour $x \geq 0$, $|xe^{-x} \sin x| \leq xe^{-x}$. D'autre part, puisque $x^3 e^{-x} \to 0$ lorsque $x \to +\infty$, on en déduit que $xe^{-x} \sin(x) = o(1/x^2)$. Ainsi, l'intégrale est absolument convergente.

4. La fonction $t \mapsto \ln(t)e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$. En 0, elle est équivalente à $\ln t$, fonction négative au voisinage de 0 et intégrable. Par comparaison, $\int_0^1 \ln t e^{-t} dt$ converge. Au voisinage de l'infini, on remarque, par croissance comparée des fonctions logarithmes, puissance et exponentielle, que $t^2 \ln t e^{-t}$ tend vers 0 lorsque t vers $+\infty$. Ainsi, $\ln t e^{-t} =_{+\infty} o(1/t^2)$. Par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente, $\int_1^{+\infty} \ln t e^{-t} dt$ converge. Ainsi, on a prouvé la convergence de $\int_0^{+\infty} \ln t e^{-t} dt$.

5. En 1, la fonction est équivalente à $\frac{1}{1-t}$, fonction de signe constant dont l'intégrale est divergente (en 1). Ainsi, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} dt$ diverge.

1. La fonction $x \mapsto \ln x$ est continue sur $]0, 1]$, le problème de convergence est en 0. Pour le traiter, on peut :

- remarquer qu'on connait une primitive de ln, à savoir $x \mapsto x \ln x - x$. On a donc
$$\int_X^1 \ln x dx = [x \ln x - x]_X^1 = -X \ln X + X - 1$$
qui tend vers -1 si X tend vers 0.
- comparer : On sait que $\sqrt{x} \ln x \to 0$ quand $x \to 0$. Ceci signifie que $\ln x = o(1/\sqrt{x})$ en 0. Puisque $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ converge, on en déduit par critère de comparaison que $\int_0^1 \ln x dx$ converge.

2. Ici, on ne connait pas de primitive de e^{-t^2} qui s'exprime facilement à l'aide des fonctions usuelles (en fait, c'est même impossible). On doit donc comparer. Commençons par remarquer que $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Le problème de convergence de l'intégrale ne se pose donc qu'au voisinage de $+\infty$. Mais il est facile de voir que
$$\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{u \to +\infty} ue^{-u} = 0.$$