TD n°1 : Mathématiques

SEG - S1 - 2024/2025 - Pr. El Mahjour

Fonctions réelles, Développements limités et Intégrales

Exercice 1

(a) Démontrer que $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = 1$.

(b) Soient m, n des entiers positifs. Étudier $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}$.

(c) Démontrer que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(\sqrt{1+x+x^2}-1) = \frac{1}{2}$.

[01]

Exercice 2

Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{x^2+2|x|}{x}$ $\quad b)\ \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+2|x|}{x}$ $\quad c)\ \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

$d)\ \lim_{x\to \pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ $\quad e)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$ $\quad f)\ \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$

$g)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$ $\quad h)\ \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1}$

[02]

Exercice 3

Soit f la fonction réelle à valeurs réelles définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

a) Tracer le graphe de f.

b) f est elle continue ?

c) Donner la formule définissant f^{-1}.

Indication ▼

[03]

Indication pour l'exercice 3 ▲

Distinguer trois intervalles pour la formule définissant f^{-1}.

Exercice 4

Donner le développement limité en 0 des fonctions :

a) $x \mapsto \ln(\cos(x))$ (à l'ordre 6).

b) $x \mapsto \tan(x)$ (à l'ordre 7).

c) $x \mapsto \sin(\tan(x))$ (à l'ordre 7).

d) $x \mapsto (\ln(1+x))^2$ (à l'ordre 4).

e) $x \mapsto \exp(\sin(x))$ (à l'ordre 3).

f) $x \mapsto \sin^6(x)$ (à l'ordre 9.)

[04]

Exercice 5

1. Développement limité en 1 à l'ordre 3 de $f(x) = \sqrt{x}$.
2. Développement limité en 1 à l'ordre 3 de $g(x) = e^{\sqrt{x}}$.
3. Développement limité à l'ordre 3 en $\frac{\pi}{3}$ de $h(x) = \ln(\sin x)$.

Indication ▼ [05]

Indication pour l'exercice 5 ▲

Pour la première question vous pouvez appliquer la formule de Taylor ou bien poser $h = x - 1$ et considérer un dl au voisinage de $h = 0$.

Exercice 6

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \qquad g(x) = \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}} \qquad h(x) = \frac{\ln x}{x} \qquad k(x) = \cos(x)\sin^2(x)$$

$$l(x) = \frac{1}{x\ln x} \qquad m(x) = 3x\sqrt{1+x^2}$$

Indication ▼ [06]

Indication pour l'exercice 6 ▲

Reconnaitre des fonctions de la forme $u' \times u$, u'/u, $u' \times u^2$, ...

Exercice 7

Les intégrales suivantes, sont-elles convergentes ?

a) Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \arctan(x) \qquad x \mapsto (\ln x)^2 \qquad x \mapsto \sin(\ln x)$$

b) Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}\,dx \qquad \int_0^{\pi} e^x \sin(x)\,dx.$$

Indication ▼ [07]

Indication pour l'exercice 7 ▲

Pensez à une intégrale par parties ... deux fois peut être !

Exercice 8

1. $\displaystyle\int_0^1 \ln t\, dt$ 2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ 3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x(\sin x)e^{-x} dx$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)e^{-t} dt$ 5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}} dt$

Indication ▼ [08]

Indication pour l'exercice 8 ▲

1. Trouver une primitive ou comparer. 2. Comparer à une intégrale de Riemann. 3. Prouver la convergence absolue. 4. Comparer en 0 (utiliser une intégrale précédente), et majorer à l'infini. 5. Trouver des équivalents en 0 et en 1.