Illustrated by Ethan Lu

Pr. Hamza El Mahjour

Mathématiques pour l'Économie

Notes de cours : TC Gestion

First Edition

Morocco

Preface

Chers étudiants, ces notes de cours ont été conçues spécialement pour mieux accompagner les étudiants de première année en économie et en gestion afin de leur fournir le matériel nécessaire dont ils auront besoin pour ce module. Il est important de savoir qu'il existe d'autres sources qui sont riches en exemples et en exercices qui peuvent aussi vous aider à mieux assimiler les notions que nous allons voir ensemble. Avec le pacte ESRI l'intitulé et le descriptif de ce module ont changé. Désormais, son appellation est : Mathématiques et les chapitres traités sont : Les fonctions réelles à une seule variable pour le premier chapitre. Les fonctions à plusieurs variable pour le deuxième. Au troisième chapitre on traitera l'optimisation continue et finalement on aboutit au calcul matriciel dans le dernier chapitre. Les outils que vous allez voir dans ce cours seront utilisés dans d'autres modules, non forcément mathématiques, comme celui de la micro-économie par exemple. Je vous souhaite une très bonne lecture et je vous incite à signaler toute anomalie détectée dans ces notes de cours. Je vous conseille vivement de consulter, si possible, les références citées dans la partie bibliographie, vous allez certainement profiter et mieux aborder les exemples et les détails qui ne sont pas présents dans ces notes de cours.

– Pr. El Mahjour
2023-05-2

Table des matières

PARTIE I

FONCTIONS RÉELLES - FONCTIONS À PLUSIEURS VARIABLES - OPTIMISATION.

Cette partie concerne l'analyse des fonctions réelles : domaines de définition, dérivabilité, montonie etc. Elle traitera aussi le calcul intégral et la convergence des intégrales généralisées. Elle comportera aussi des chapitres sur les fonctions à plusieurs variables où l'optimisation sans contraintes et avec les contraintes d'égalité ou d'inégalité sont des notions visitées.

1 Logique et Ensembles

Partie I

Les générations suivantes considéreront Mengenlehre (théorie des ensembles) comme une maladie dont on s'est remis ... Henri Poincaré

Sec 1.1 Ensembles, sous-ensembles et parties

Une **collection d'objets** en mathématique est un **ensemble**. Généralement on note les ensembles par des lettres majuscules. Par exemple, on peut prendre l'ensemble des lettres de l'alphabet français, on écrit

$$E = \{a, b, c, \ldots, y, z\}.$$

Dans l'**écriture ensembliste** l'ordre des objets n'est pas important. Autrement dit,

$$\{a, c, b, f, e\} = \{c, b, f, e, a\}.$$

On dit que $a, b, c\ldots$ sont des éléments de E. On peut écrire alors $a \in E$, $b \in E$, $c \in E$, ... et on lit "a appartient à E","a est un élément de E" ou bien "c est dans E". Quand un élément n'appartient pas à un ensemble on écrit par exemple $12 \notin E$ car 12 n'est pas une lettre de l'alphabet. Les ensembles peuvent être contenus dans d'autres ensembles, on parle de **sous-ensembles**. Par exemple, si on prend l'ensemble $H = \{a, b, c, d\}$ qui ne contient que les toutes première lettre de l'alphabet, on constate que H est un sous-ensemble de E et on peut écrire $H \subset E$ et on lit "F est inclus dans E" ou bien "E contient F". Quand un ensemble quelconque G est composé d'un nombre d'éléments finis on dit que G est **fini**. Imaginons que G est fini contenant cinq éléments alors on dit que "le **cardinal** de G est cinq" et on écrit $\text{card } G = 5$. Si G n'est pas fini comme l'ensemble des nombres entiers ou réels alors le cardinal de G est infini. L'ensemble qui ne contient aucun élément est l'ensemble **vide** noté $\emptyset$. L'ensemble vide est un sous-ensemble de n'importe quel ensemble. En fait, on peut créer l'ensemble des parties de G qui est composé de tous les sous-ensembles possibles de G. On note $\mathcal{P}(G)$ l'**ensemble des parties** de G. Il est facile d'énumérer explicitement $\mathcal{P}(G)$ quand G est fini. Par exemple, prenons $G = \{a, b, c\}$ alors les sous ensembles de G sont $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, G\} = \mathcal{P}(G)$. Pour tout ensemble G constitué de n éléments, l'ensemble des parties $\mathcal{P}(G)$ est de cardinal 2^n. Soient E et F deux sous-ensembles d'une ensemble G.

Définition 1.1.1.
1. *L'**intersection** de E et F est*
$$E \cap F = \{x \in G, \quad x \in E \text{ et } x \in F\}.$$
2. *L'**union** de E et F est*
$$E \cup F = \{x \in G, \quad x \in E \text{ ou } x \in F\}.$$
3. *Le **complémentaire** de E dans G est*
$$C_G^E = \overline{E} = \{x \in G, x \notin E\}.$$

Exemple 1.1.
1. *Si $E = \{1, -1, 0, 2, 13\}$ et $F = \{11, -1, 1, 3\}$. Alors, $E \cap F = \{-1, 1\}$, $E \cup F = \{-1, 0, 1, 2, 3, 11, 13\}$, $C_{E\cup F}^E = \{3, 11\}$.*
2. *Soit $E = [-2, 5]$ et $F = [2, 7]$ dans $\mathbb{R}$. Alors, $E \cap F = [2, 5]$, $E \cup F = [-2, 7]$ et le complémentaire de*

F dans $\mathbb{R}$ c'est $\overline{F} =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$.

Pour visualiser les intersections, unions et complémentaires des ensembles, on peut utiliser dans certains cas le **diagramme de Venn** comme dans la figure 1.1.

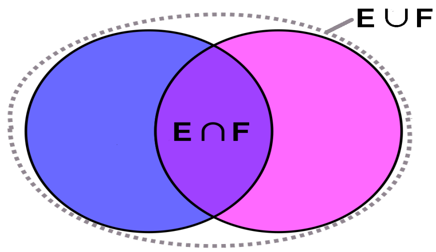


FIGURE 1.1 – Diagramme de Venn illustrant les intersection et l'union de deux ensembles.

Remarque. — *Si $A \cap B = \emptyset$ on dit que A et B sont **disjoints**.*
— *Si $E \subset F$ alors $E \cap F = E$ et $E \cup F = F$.*

Sec 1.2 Applications : surjection, injection et bijection

On peut définir des relations entre deux ensembles en mettant en liaison les éléments de ces ensembles. Pour clarifier cette idée, on sollicite le graphe 1.2. L'ensemble $E = \{a, b, c, d, e\}$ s'appelle un ensemble de **départ** et $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ s'appelle un ensemble d'**arrivé**. On remarque que les liaisons entre les éléments de E et F sont : $a \to 1$, $b \to 2$, $a \to 4$, $a \to 1$, $d \to 2$ et $e \to 4$. On écrit formellement

$$f(a) = 1, f(c) = 4, \ldots,$$

et on dit l'**image** de a par f est 1. On voit que des éléments différents de E peuvent avoir des images identiques. On dit que les **antécédents** de 4 sont b et d et on écrit

$$f^{-1}(2) = \{b, d\}.$$

1. Chaque élément de E doit avoir une unique image.
2. La notation f^{-1} est à ne pas confondre avec la notion de fonction inverse.

Définition 1.2.1. *Soit E un ensemble non vide. L'application de E vers E qui à x associe x se note Id_E et s'appelle l'identité de E. Ainsi, $Id_E(x) = x$ pour tout x dans E.*

Définition 1.2.2 (Injection)**.** *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. f est **injective** ssi*

$$\forall x, y \in E, \qquad x \neq y \implies f(x) \neq f(y),$$

ou bien

$$\forall x, y \in E, \qquad f(x) = f(y) \implies x = y.$$

Autrement dit, deux éléments différents de E ne peuvent pas avoir la même image dans F.

Définition 1.2.3 (Surjection)**.** *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. f est **surjective** ssi*

$$\forall y \in F, \exists x \in E, \qquad y = f(x).$$

C'est à dire, chaque élément de l'ensemble d'arrivée admet au moins un antécédent.

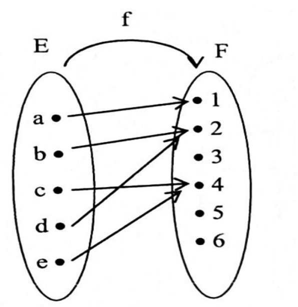


FIGURE 1.2 – Application de E dans F.

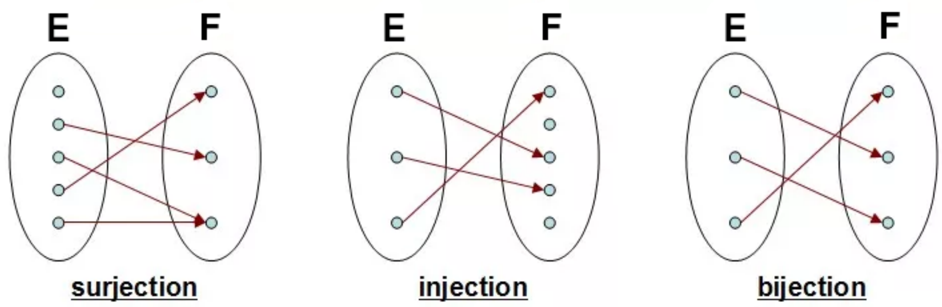


FIGURE 1.3 – Les trois types d'applications : surjective, injective et bijective.

Définition 1.2.4 (bijection)**.** *Si $f : E \longrightarrow F$ est une application surjective et injective alors elle est* ***bijective****.*

Les graphes de la figure 1.3 résument les trois cas de figures quand E et F sont finis. Si nous avons deux applications définis $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow C$, on peut en extraire une nouvelle application en combinant les deux. Considérons l'exemple suivant qui est représenté graphiquement dans la figure 1.4. Quelle est l'image par g de l'image par f de l'élément 1 ? Cette question demande de savoir $g\,(f(1))$. Tout d'abord on doit impérativement se rappeler que pour la **composition des fonctions on commence de droite à gauche** ! C'est à dire que nous calculons $f(1) = 1 \to g(f(1)) = g(1) = 2 \to g\,(f(1) = 2)$. On peut alors entièrement définir toutes les autres images des autres éléments par la fonction "$g(f)$" qui est plutôt notée $g \circ f$.

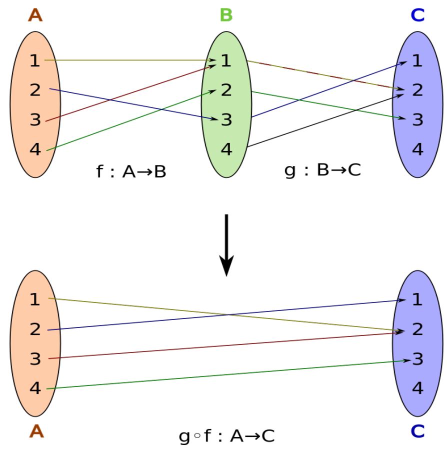


FIGURE 1.4 – f est composée avec g ce qui donne $f \circ g$.

Définition 1.2.5 (Composée de fonctions)**.** *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $f : F \longrightarrow G$ deux applications. On définit* *la* ***composée*** *de f et g telle que*

$$\begin{array}{rrcl} g\circ f: & E & \longrightarrow & G \\ & x & \longmapsto & g\left(f(x)\right), \end{array}$$

pour tout x dans E.

Le théorème suivant est très important et concerne la composition des fonctions aussi.

Proposition 1.2.1. *Soit X, Y, et Z des ensembles, et soit $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ deux applications.*

(a) *Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ l'est aussi.*

(b) *Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ l'est aussi.*

En particulier, si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est aussi bijective.

Proof **(Preuve).** (a) Soient x et y dans E tels que $g\circ f(x) = g\circ f(y)$. Puisque g est injective alors $f(x) = f(y)$. Et puisque f est injective alors $x = y$. Donc $g \circ f$ est injective.

(b) Soit $z \in Z$. Puisque g est surjective il existe $y_z \in Y$ tel que $g(y_z) = z$. De plus y_z est dans Y et f est surjective donc il existe $x_{yz} \in X$ tel que $f(x_{yz}) = y_z$. En remplaçant dans g on obtient $g(f(x_{yz}) = z$ c'est à dire $z = g\left(x_{yz}\right)$ donc $g \circ f$ est bijective.

■

Pour alléger les notations et quand toute ambiguïté est absente, on remplacera $g\circ f$ par une notation multiplicative $g \circ f$. L'opération $\underbrace{f \circ f \circ \ldots f \circ}_{nfois}$ sera noté f^n.

Si $f : E \longrightarrow F$ est une bijection, il existe alors une bijection inverse $f^{-1} : F \longrightarrow E$ telle que $ff^{-1}(x_F) = x$ et $f^{-1}f(x_E)$ pour tout $x_E \in E$ et tout $x_F \in F$.

Sec 1.3 Produit Cartésien

On prend deux ensembles $E = \{a, b, c, d\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$. On représente les deux ensembles sur deux axes perpendiculaires (voir figure 1.5). Le point rose est de coordonnées $(c, 1)$ et le point vert $(b, 3)$. Si on énumère

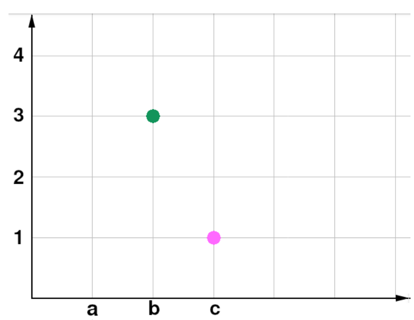


FIGURE 1.5 – Coordonnées des points suivant les axes E et F.

toutes les coordonnées possibles où les éléments de E sont des abscisses et F sont des ordonnées on retrouve l'ensemble

$$\{(a, 1); (a, 2); (a, 3); (a, 4); (b, 1); (b, 2); (b, 3); (b, 4); (c, 1); (c, 2); (c, 3); (c, 4)\}.$$

on appelle l'ensemble précédent le **produit cartésien** de E et F qu'on note $E \times F$. Plus généralement on a la définition suivante

Définition 1.3.1 (Produit Cartésien)**.** *Soit $E_1, E_2, \ldots, E_n$ des ensembles quelconques. On définit le produit cartésien $\Pi_{i=1}^n E_i = E_1 \times E_2 \ldots \times E_n$ comme l'ensemble des n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ où $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$,…,*

$x_{n-1} \in E_{n-1}$ et $x_n \in E_n$.

Remarque. 1. *On note* $\underbrace{E \times E \times \ldots \times E}_{n \text{ fois}} := E^n$.

2. *On appelle* (a, b) *un couple, et on appelle* (a, b, c) *un triplet, etc.*
3. $\text{card }(E \times F) = \text{card }(E) \times \text{card }(F)$.

2

LES FONCTIONS RÉELLES

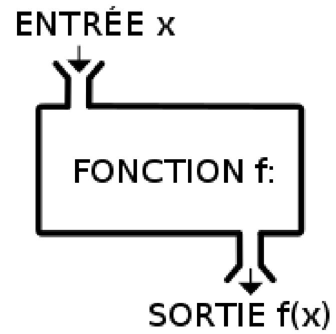
Partie I

Essayer de faire du infinitésimal sans utiliser de fonctions serait l'une des choses les plus inutiles que vous puissiez faire. Si le calcul infinitésimal était une recette, les fonctions seraient le premier ingrédient Adrian Banner

Sec 2.1 Introduction aux fonctions

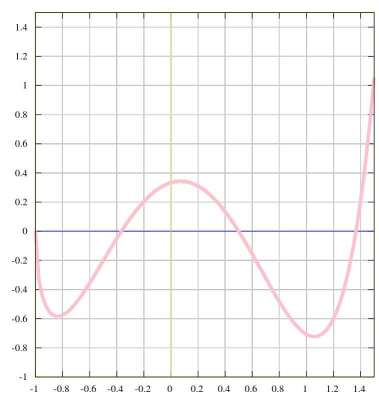
On a déjà vu la définition d'une application de E dans F. Une fonction réelle est un cas particulier d'applications. Une fonction f définie sur $D_f \subset \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On appelle D_f le domaine de définition de la fonction f. Pour abrévier on note

$$\begin{array}{llll} f : D_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$



Il est utile de voir la fonction f comme une "machine". Si on prend x dans le domaine D_f. Alors x a le droit de rentrer dans cette machine car les autres éléments $\overline{x} \notin D_f$ peuvent "endommager" cette machine s'ils sont utilisés. Dans ce cas x subira des transformations et sortira de la machine sous la forme $f(x)$ (voir figure ??). Considérons $f(x) = \sqrt{x}$. Déjà on peut remarquer que si $x < 0$, on ne pourra pas calculer sa racine carrée, par conséquent $D_f = \{x \in \mathbb{R}; \quad x \geq 0\}$. Or, cette machine convertit tous les nombres qu'on met dedans en racine carrée de ce nombre $2 \mapsto \sqrt{2}$, $9 \mapsto \sqrt{9} = 3$ etc.
Il y a aussi une autre façon de visualiser une fonction f par son graphe. Le graphe d'une fonction f est le produit cartésien C_f où

$$C_f = \{(x; f(x)); \qquad x \in D_f\}.$$



Le graphe f nous donne un aperçu de l'historique et le future de f et peut nous aider à les imagine quand x tend vers $\pm\infty$. Pour les domaines de définitions et l'étude des fonctions réels, on préfère utiliser des notations d'**intervalles** plutôt qu'une écriture ensembliste. On donne dans ce qui suit les différents intervalles possibles dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl}]a, b[& = & \{x \in \mathbb{R}; \quad a < x < b\}, \\ ]a, b] & = & \{x \in \mathbb{R}; \quad a < x \leq b\}, \\ [a, b[& = & \{x \in \mathbb{R}; \quad a < x \leq b\}, \\ [a, b] & = & \{x \in \mathbb{R}; \quad a \leq x \leq b\}, \\ ]a; +\infty[& = & \{x \in \mathbb{R}; \quad x > a\}, \\ [a; +\infty[& = & \{x \in \mathbb{R}; \quad x \geq a\}, \\ ]-\infty; b[& = & \{x \in \mathbb{R}; \quad x < b\}, \\ ]-\infty; b] & = & \{x \in \mathbb{R}; \quad x \leq b\}, \\ ]-\infty; +\infty[& = & \mathbb{R}. \end{array}$$

Comment trouver en pratique ce domaine de définition. Quand on étudie une fonction, une des choses primordiales à trouver est son domaine de définition. Comme on l'a déjà aperçu avec la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, elle ne peut être définie

Fonction	Domaine de définition
constante a	$\mathbb{R}$
$a_n x^n + a_{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$
$Ln(x)$	$]0; +\infty[$
$\sqrt[n]{x}$	$[0, +\infty[$
$\exp x$	$\mathbb{R}$

sur tout $\mathbb{R}$ car la racine d'un nombre négative n'est pas définie. Bon, on a compris que c'est vilain de prendre des racines négatives mais quoi d'autre pourrait causer des problèmes ? Voici les trois les plus communes qui réduisent le domaine de définition d'une fonction

1. Le dénominateur d'une fraction ne peut être nul.
2. On ne peut pas prendre la racine $n-$ème d'un nombre négatif.
3. On ne peut pas prendre le logarithme népérien d'un nombre négatif ou nul.

Exemple 2.1. *déterminons le domaine de définition de la fonction* $h(x) = \frac{\log(x+2)}{\sqrt{x}}$. *D'abord, pour le logarithme on a la condition* $x + 2 > 0$. *Pour le dénominateur on a la condition* $\sqrt{x} \neq 0$ *et pour la racine carrée* $x \geq 0$. *Si on combine les trois conditions on trouve que le domaine de définition est* $D_h =]0; +\infty[$.

Des fois, même si l'expression algébrique de d'une fonction permet de la définir sur tout $\mathbb{R}$ ou un intervalle infini, on peut imposer de se restreindre sur une partie de cet intervalle.

Voici une liste non-exhaustive de certaines fonctions usuelles et leur domaine de définition

Définition 2.1.1. *Parité des fonctions On dit que f est une fonction* ***paire*** *(**impaire**) si pour tout $x \in D_f$ son opposé $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$)*

D'un point de vue géométrique, une fonction paire a un graphe qui est auto-symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Un fonction impaire a un graphe qui a une symétrie centrale de tout son graphe par rapport à l'origine. On peut consulter la figure 2.1.

Example 2.1.1.

(détaillé)

1. La fonction $g(x) = x^2 + 5$ est pair car $g(-x) = (-1)^2 + 5 = x^2 + 5 = g(x)$.
2. La fonction $f(x) = \frac{2x^3+x}{3x^2+5}$, on a
$$f(-x) = \frac{2(-x^2) + (-x)}{3(-x^2) + 5} = \frac{-(2x^3 + x)}{3x^2 + 5} = -f(x).$$
Donc f est une fonction impaire.

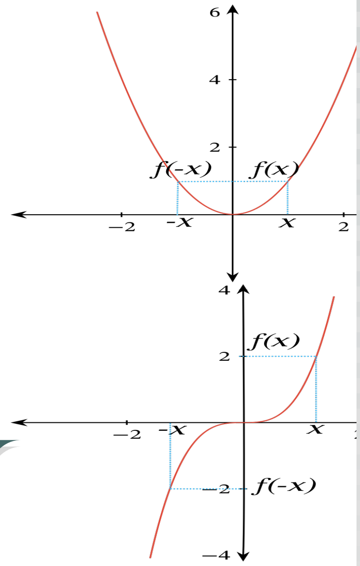


FIGURE 2.1 – Paire (en h
Impaire (en bas).

Une fonction peut avoir des expressions algébriques différentes sur différents domaines de $\mathbb{R}$. On l'appelle dans ce cas une **fonction par morceaux**. Voici quelques exemples

Exemple 2.2. 1. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq 0, \\ 5x & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$

2. $g(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad x < -2, \\ 10 & \text{si} \quad x = -2, \\ \exp x & \text{si} \quad x > -2. \end{cases}$

3. $h(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0, \\ 6x - 3 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \log(x+1) - 3 & \text{si} \quad 1 < x \leq 4, \\ \cos x & \text{si} \quad x > 4. \end{cases}$

Définition 2.1.2. 1. *Une fonction est croissante (strictement croissante) si $f(x) \leq f(y)$ pour tout $x < y$ ($f(x) < f(y)$).*

2. *Une fonction est décroissante (strictement décroissante) si $f(x) \geq f(y)$ pour tout $x < y$ ($f(x) > f(y)$).*

Exemple 2.3. *La fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $[0, 5]$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante strictement sur $]0, +\infty[$.*

Sec 2.2 Limites et continuité

Le calcul infinitésimal n'existerait pas sans le concept des limites. Pour comprendre l'idée de base, on va considérer une fonction f et un point a de l'axe des abscisses. Ce qu'on veut comprendre est le comportement de $f(x)$ quand x est très proche de a mais pas égal à a. Pourquoi on peut s'intéresser à ce comportement ? On supposera que le domaine de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et que $f(x) = x - 1$. Si on trace la fonction on obtient le graphe montré ci-contre. On a envie de dire que l'image de $a = 2$ par la fonction f est 1, mais on ne peut pas écrire que $f(2) = 1$ car f n'est pas définie en $a = 2$. Par contre on peut s'approcher autant que veut de $a = 2$ et voir ce qui se passe. $f(1.99) = 0.99$, $f(2.0001) = 1.0001$, $f(1.99999) = 0.99999$ etc. Nous pouvons conjecture que quand x est très très proche de $a = 2$ alors $f(x)$ est très très proche de 1. Pour exprimer cette idée mathématiquement on écrit $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$ et on dit $f(x)$ **tend vers** 1 quand x **tend vers** 2. On peut dire aussi, la limite de f quand x tend vers 2 est égal à 1. Supposons maintenant que nous définissons presque la même fonction précédente avec un petit changement : $g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, \\ 3 & \text{si} \quad x = 2. \end{cases}$ On voit bien que $g(2) = 3$, mais en s'approchant de 2 sans l'attendre, les valeurs de $g(x)$ tendent vers 1 et non pas 3. C'est à dire que la limite reste la même et ne dépend pas de la valeur imposée en 2. C'est à dire que $\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} f(x) = 1$. Voici maintenant la définition formelle d'une limite de fonction en un point a.

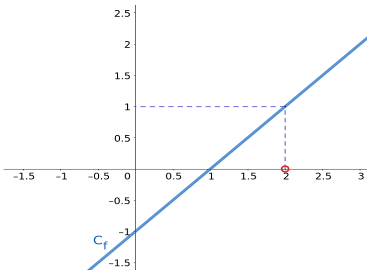


FIGURE 2.2 – $f(x)$ **s'approche de 1 quand x s'approche de** 2.

Remarque. *Si f est une fonction constante $f(x) = a$ pour tout x. On a $\lim_f(x) x \to x_0 = a$ quelque soit x_0. Cette remarque est presque évidente si on comprend bien le fonctionnement d'une fonction constante qui va tout simplement prendre la même valeur et donc va être toujours égale à cette constante partout dans $\mathbb{R}$.*

Sec

Définition 2.2.1. *Limite finie d'une fonction Soit f une fonction et $a \in \mathbb{R}$. On a $\lim_{x \to a} f(x) = L$, si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

En d'autres termes, quand $f(a)$ est dans l'intervalle $J =]f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon[$, on trouvera certainement un intervalle $I =]f(a) - \alpha_\epsilon, f(a) + \alpha_\epsilon[$ autour de a tel que $f(I) \subset J$ et ceci pour un ϵ infiniment petit comme le montre la figure 2.3.

Les propriétés suivantes sont vraies. Si $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ et $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$

1. $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = L_1 + L_2$,
2. $\lim_{x\to a} f(x) \times g(x) = L_1 \times L_2$,
3. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ si $L_2 \neq 0$.

De plus si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{x\to b} g(x) = L$ alors $\lim_{x\to a} g\circ f(x) = L$.
Dans ce qui suit nous allons définir le concept de continuité d'une fonction.

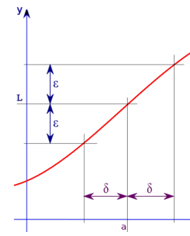


FIGURE
$\lim f(x) = L$

Définition 2.2.2. *On dit que la fonction f est continue en a si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Dans l'exemple déjà discuté où $g(x) = x - 1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et $g(2) = 3$, on peut voir que $lim_{x\to 2} g(x) = 3 \neq g(2)$. Ce qui veut dire que g n'est pas continue en 2. Intuitivement, le graphe d'une fonction continue peut être tracé avec un stylo sans jamais lever le stylo alors que le tracé d'une fonction discontinue est rompu dans certains points.

Définition 2.2.3.

1. *Une **fonction polynomiale** est une fonction de la forme*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

2. *Une **fonction rationnelle** est une fonction qui est un quotient de deux polynômes. C'est à dire*

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m}$$

Le domaine de définition d'une fonction rationnelle est

$$\mathbb{R} \setminus \{\text{racines du polynôme dénominateur}\} = \mathbb{R} \setminus \{\text{pôles de la fraction}\}\,.$$

Theorem 2.2.1.

1. *Toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}$*
2. *Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition.*

***Proof*.** 1. On remarque qu'une fonction f polynomiale est une somme de fonctions de la forme $a_i x^i$ avec un premier terme qui est constant a_0. Soit x_0 un nombre quelconque de $\mathbb{R}$. On sait que $\lim_{x\to x_0} a_0 = a_0$. Pour les autres termes on a $\lim_{x\to x_0} a_i x^i = a_i x_0^i$. Donc $\lim_{x\to x_0} f(x) = a_i x_0^i = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = f(x_0)$.
2. De même si on évite les x_0 qui provoquent le fait que le dénominateur soit nul, alors on aurait la fraction de deux fonctions continues qui est sera continue aussi. ■

Il existe une notion en analyse qui permet d'approcher soit à gauche "$-$" soit à droite "$+$" n'importe quel point. On dit que x tend vers x_0 **à gauche** si on prend seulement des valeurs de $x < x_0$. On dit que x tend vers x_0 **à droite** si on prend seulement des valeurs de $x < x_0$. On note la limite à gauche $\lim_{x\to x_0^-}$ et à droite $\lim_{x\to x_0^+}$
On a des cas de limites importants qui restent à présenter ici. Ce sont les cas montrés sur la figure 2.4 Sans faire de calcul, on remarque que la droite vertical orange en pointillés n'est jamais atteinte par le graphe en bleu de la fonction f. En fait quand x s'approche de $x_0 = 3$ du côté droit les valeurs de $f(x)$ deviennent de plus en plus grande et tendent vers l'infini. En s'approchant du même point du côté gauche les valeurs de f deviennent de plus en plus petites et convergent vers $-\infty$ (**asymptote verticale**). Pour le graphe orange de g, on remarque que

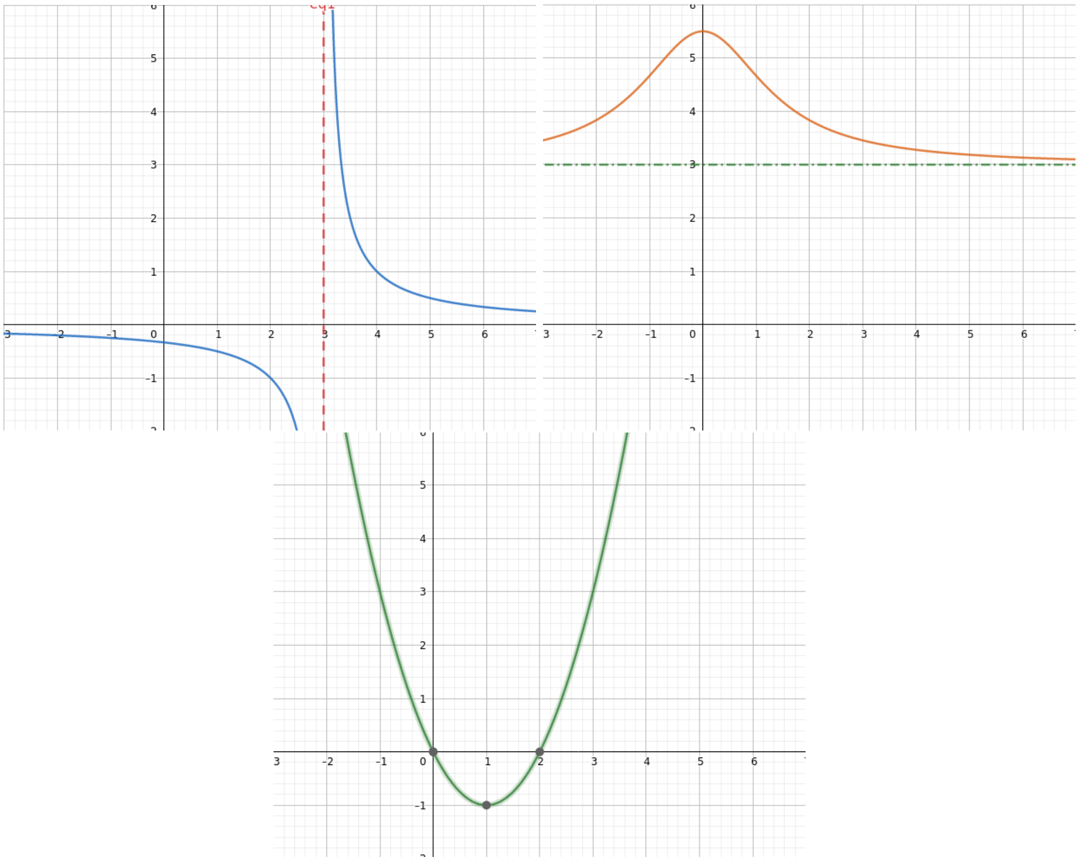


FIGURE 2.4 – Les deux graphes du haut de gauche à droite représentent consécutivement $f(x) = \frac{1}{x-3}$, $g(x) = \frac{5}{x^2+2} + 3$ et le graphe d'en bas est celui de $h(x) = x^2 - 2x$.

$f(x)$ s'approche de $y = 3$ quand x tend vers l'infini (**asymptote horizontale**). Pour le troisième graphe figure on remarque que h devient grand quand x devient grand aussi. Plus précisément, on écrit : $\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 3$ et $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

Propriété 2.1.

1. *Si* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l > 0$ *et* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = +\infty$.
2. *Si* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l > 0$ *et* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ *alors* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = -\infty$.
3. *Si* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l < 0$ *et* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = -\infty$.
4. *Si* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l < 0$ *et* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ *alors* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = +\infty$.
5. *Si* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l > 0$ *et* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0^+$ *alors* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.
6. *Si* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l < 0$ *et* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0^+$ *alors* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.
7. *Si* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l > 0$ *et* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0^+$.
8. *Si* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l < 0$ *et* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0^-$.

$$\lim_{x\to 0^-} x^n = \begin{cases} 0^+ & \text{si} \quad n \text{ pair} \\ 0^- & \text{si} \quad n \text{ impair} \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad n \text{ pair} \\ -\infty & \text{si} \quad n \text{ impair} \end{cases}$$

Example 2.2.2.

Important

— $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{3}{x^5} = \frac{3}{\lim\limits_{x\to 0^+} x^5} = \frac{3}{0^+} = +\infty,$

— $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{3}{x^5} = \frac{3}{\lim\limits_{x\to 0^-} x^5} = \frac{3}{0^-} = -\infty,$

— $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3}{x^5} = \frac{3}{\lim\limits_{x\to \infty} x^5} = \frac{3}{+\infty} = 0^+,$

Propriété 2.2. *Limites utiles Supposons que $a_m \neq 0$ et $b_n \neq 0$ alors*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \frac{a_m}{a_n} \lim_{x\to\pm\infty} x^{m-n}.$$

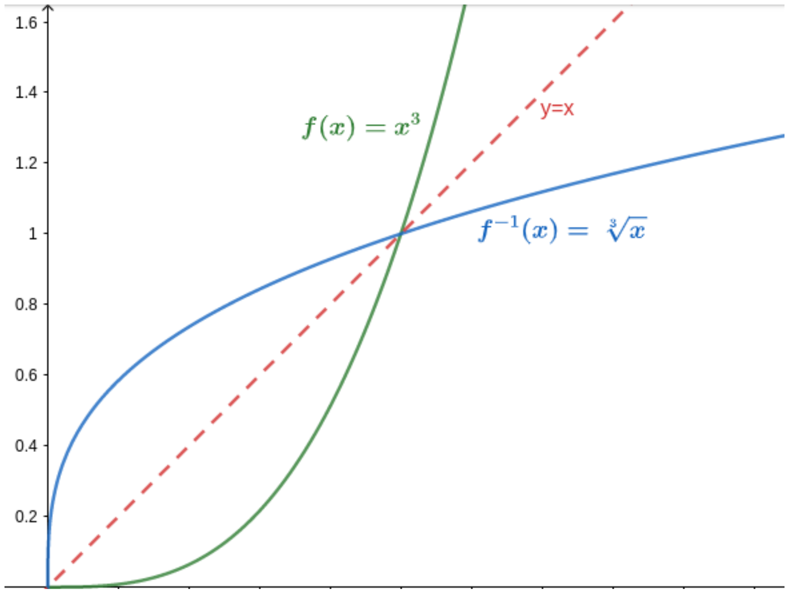
Voici les graphes des fonctions usuelles les plus utilisées

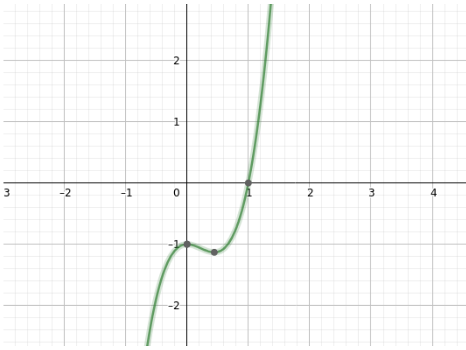
Définition 2.2.4. *Soit f une fonction bijective (voir annexe) de $I = [a, b]$ vers J alors il existe une bijection inverse de J vers I notée f^{-1} telle que $f \circ f^{-1}(u) = u$ pour tout u dans J, et $f^{-1} \circ f(v) = v$.*

Propriété 2.3. *- Les graphes de f et son inverse f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.*
- Si f est croissante ou décroissante alors f^{-1} aussi.
- Si f est continue alors f^{-1} est continue.

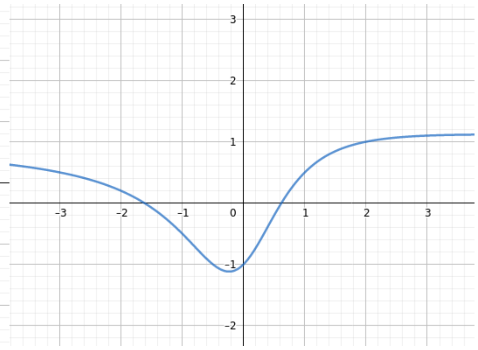
Si une fonction f est continue est strictement croissante ou bien strictement décroissante sur un intervalle alors elle est inversible !

Par exemple, la fonction $f : x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur et continue sur $[0, +\infty[$. Donc elle admet une bijection inverse f^{-1} vérifiant $f^{-1}(f(x)) = x$. La fonction f^{-1} n'est autre que $x \mapsto \sqrt[3]{x}$.

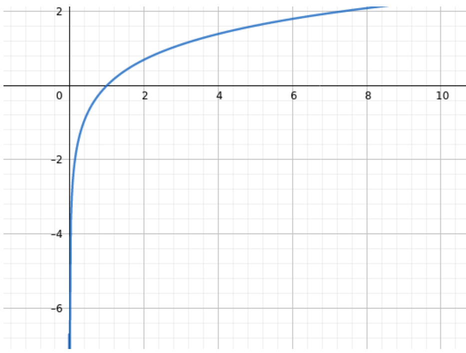




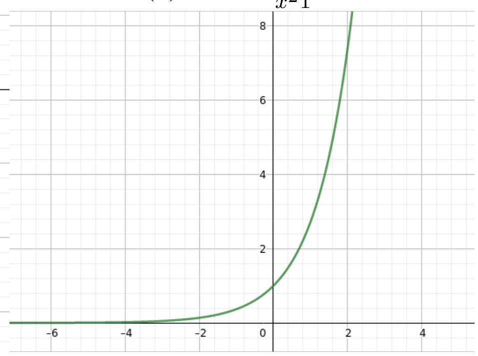
(a) $x \mapsto 3x^3 - 2x^2 - 1$



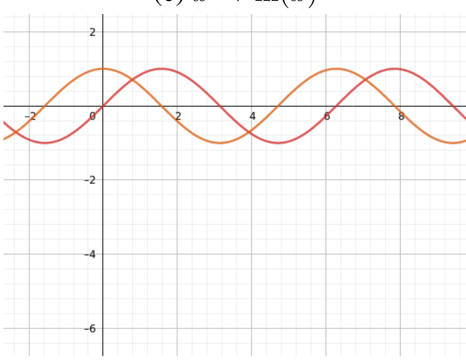
(b) $x \mapsto \frac{x+x^2-1}{x^2 1}$



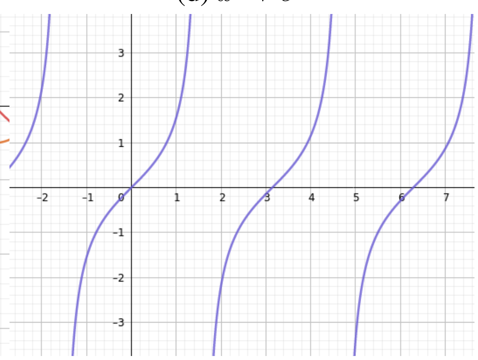
(c) $x \mapsto \ln(x)$



(d) $x \mapsto e^x$



(e) $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$



(f) $x \mapsto \tan(x)$

Theorem 2.2.2.

des valeurs intermédiaires (simplifié) Soit $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ *et* f *une fonction continue sur* I. *Si* $f(a)f(b) < 0$ *alors il existe* $c \in]a, b[$ *tel que* $f(c) = 0$.

L'énoncé plus générale est de dire que $f(I)$ est un intervalle si I est un intervalle et f est continue. Il existe aussi une version encore plus générale qui est le théorème de Bolzano.

Example 2.2.3.

Soit $g : x \mapsto x^3 + 1$. On a $f(-2) = -7$ et $f(1) = 2$. Donc $f(-2)f(1) < 0$. Et puisque f est continue (car c'est une fonction polynomiale) alors il existe $x_0 \in] - 2, 1[$ tel que $g(c) = 0$.

Sec 2.3 Dérivée d'une fonction

La dérivée d'une fonction est importante pour connaître son comportement. Elle confère plus précisément comment varie la fonction autour d'un point x_0. Regardons l'exemple suivant sur la relation entre le prix P des voitures de luxe et la demande Q. On définit alors la fonction $g(P)$ qui représente le nombre de voitures de luxe commandées si le prix est P. On est d'accord que plus le prix devient grand moins les clients seront intéressés d'acheter, ce qui peut être écrit autrement en lettres.

$$-\frac{\text{Quantité 1 - Quantité 2}}{\text{Prix1 - Prix2}} = \frac{\Delta Q}{\Delta P},$$

Si on veut connaître l'influence sur la demande d'une toute petite différence de prix, ΔP doit tendre vers 0. C'est exactement la définition d'une dérivée de fonction.

Définition 2.3.1. *Soit f une fonction réelle. La **dérivée** de $x_0 \in \mathbb{R}$ est*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L,$$

si L existe.

Si $L \neq \infty$ alors on dit que f est **dérivable**. Si $L = \pm\infty$ ou L n'existe pas alors f n'est pas dérivable en x_0.

Sec 2.4 Fonctions usuelles et règles de dérivation

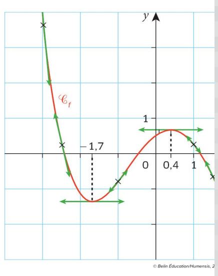
Si f et g sont deux fonctions dérivable sur un domaine nous avons les propriétés suivantes

Propriété 2.4.
1. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,
2. $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$,
3. $(f \cdot g)' = f'g + fg'$,
4. $(f(x)^n)' = nf'(x)f(x)^{n-1}$,
5. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.

Définition 2.4.1. *Approximation linéaire d'une fonction Une bonne approximation d'une fonction f dérivable en un point x_0 est par sa **tangente** qui est définie comme suit*

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Que peut nous enseigner f' à propos du comportement de f. Vous voyez sur la figure 2.7 que quand la fonction est décroissante sur un intervalle, ses tangentes sur le même intervalle ont une pente négative. Par contre, les pentes des tangentes sont positives si la fonction est croissante.



FIGUR

Proposition 2.4.1.

Croissance/Décroissance Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
1. *Si $f'(x) \leq 0$ ($f'(x) < 0$) sur I alors f est décroissante (strictement).*
2. *Si $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) > 0$) sur I alors f est croissante (strictement).*
3. *Si $f'(x_0) = 0$ alors x_0 est un **extremum** [a] de f.*

a. Un extremum est soit un point maximum ou minimum.

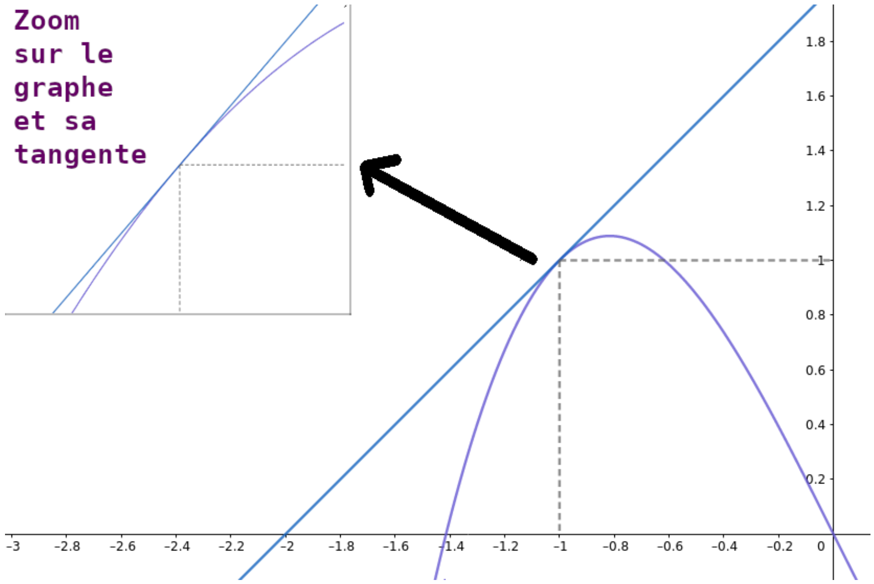


FIGURE 2.6 – A l'oeil nu, on n'arrive pas a distinguer entre la droite tangente bleu d'équation et le graphe de la fonction violet au voisinage du point $(-1, 1)$.

Pour prouver la proposition précédente nous avons besoin du théorème suivant qui est essentiel en analyse réelle.

Theorem 2.4.3.

des accroissements finis Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

***Proof*.** (Croissance/Décroissance) Soit x_1 et x_2 de l'intervalle I éléments d'un intervalle I avec $x_1 < x_2$. On sait que f est dérivable sur $]x_1, x_2[$ donc il existe $x_{12} \in]x_1, x_2[$ telle que $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(x_{12})$. Donc $f(x_2) - f(x_1) = f'(x_{12}) \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0}$. On voit bien que si $f'(x_{12}) > 0$ alors $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ (> 0) donc f sera croissante (strictement) sur I. Même discussion si $f'(x_{12})$ est de signe négatif. ■

Theorem 2.4.4.

Rolle Soit f une fonction réelle sur un intervalle $[a, b]$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Sec 2.5 Rappels sur les fonctions logarithmes, exponentielles et trigonométriques

On rappelle dans cette parties quelques propriétés essentielles concernant les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto Ln(x)$. Plus généralement on a la définition suivante

Définition 2.5.1. *Soit $a > 0$. Les exponentielles de base a sont la famille de fonctions*

$$x \longmapsto \exp_a(x) = a^x.$$

Les fonctions logarithmiques de base a sont

$$x \longmapsto \log_a(x) = \frac{Ln(x)}{Ln(a)}.$$

Propriété 2.5. *Logarithme*

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} Ln(x) = -\infty$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} Ln(x) = +\infty$
3. $Ln(1) = 0$
4. $Ln(e) = 1$
5. $Ln(x \cdot y) = Ln(x) + Ln(y)$
6. $Ln(\frac{x}{y}) = Ln(x) - Ln(y)$
7. $Ln(x^r) = rLn(x)$
8. $\lim_{x\to 1} \frac{Ln(x)}{x-1} = 1$

Propriété 2.6. *Exponentielle*

1. $\lim\limits_{x\to -\infty} \exp x = 0$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \exp(x) = +\infty$
3. $\exp(0) = 1$
4. $\exp(Ln(e)) = e$
5. $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$
6. $\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$

On rappelle aussi que la fonction exponentielle est l'inverse de la fonction logarithme. C'est à dire que $\exp(Ln(x))$ $Ln(\exp(x)) = x$. Nous avons la liste suivante qui représente la dérivée de chaque fonction usuelle

Propriété 2.7. *Dérivées de fonctions usuelles composées On suppose que u est une fonction respecte le domaine de définition de chaque fonction avec laquelle elle est composée. Soit a une constante positive.*

1. $(Ln\ u(x))' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ 2. $(\exp\ u(x))' = u'(x)\exp u(x)$

3. $\left(a^{u(x)}\right)' = a^{u(x)}Ln(a)u'(x)$ 4. $(\log_a\ u(x))' = \dfrac{u'(x)}{Ln(a)u(x)}$

5. $(\sin\ u(x))' = cos(u(x)) \cdot u'(x)$ 6. $(\cos\ u(x))' = -sin(u(x)) \cdot u'(x)$

7. $\tan u(x) = \frac{u'(x)}{(\cos u(x))^2}$ 8. $\arcsin u(x)' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$

9. $(\arccos u(x))' = \frac{-u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$ 10. $(\arctan\ u(x))' = \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$

3 INTÉGRALES DÉFINIES ET GÉNÉRALISÉES

Partie I

Rien n'est beau que le vrai. Hermann Minkowski

Sec 3.1 Introduction : le problème de l'aire

Il est facile de calculer l'aire d'une surface usuelle comme un triangle ou un rectangle. On voit sur la figure 3.1 que la surface verte au-dessous de la courbe de la fonction $f(x) = 3x$ sur l'intervalle $[0, 2]$ est obtenu grâce à la formule $S_1 = \frac{B \times h}{2}$, donc $S_1 = \frac{3\times 6}{2} = 9$. Et la surface rose est un rectangle, on applique donc la formule $S_2 = L \times l = 4 \times 3 = 12$. Mais imaginez que nous avons envie de calculer l'aire S^* au-dessous de la courbe d'une

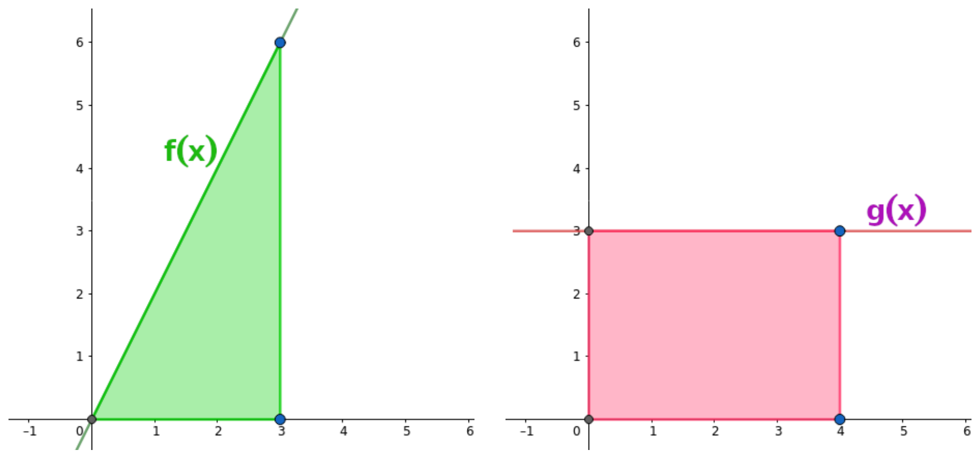


FIGURE 3.1 – Les courbes successives des fonctions $f(x) = 3x$ et $g(x) = 3$.

fonction $x \mapsto x^2$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Existe-t-il une formule qu'on peut appliquer ? Eh bien, ce n'est pas tout à fait possible. Néanmoins, on pourrait "approcher" l'aire exacte de cette surface S_* par des aires approximatives. Nous allons effectuer cette approximation en calculant des aires de rectangles d'aire totale majorant et minorant S_* comme il est montré sur la figure 3.2. On commence d'abord par diviser l'intervalle $[0, 1]$ en quatre parties égales $[0, \frac{1}{4}],]\frac{1}{4}, \frac{1}{2},]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ et $]\frac{3}{4}, 1]$. Nous allons nommé S_{M_4} la somme des aires des rectangles dépassant S^*. S_{m_4} sera la somme des aires rectangles inférieur à S^*. On a bien sûr $S_{m_4} \leq S^* \leq S_{M_4}$. En fait, la largeur et la longeur de chaque rectangle est facilement obtenu on multipliant la longueur de chaque sous-intervalles par l'image de f au point d'extrêmité. Plus précisément, nous allons calculer les sommes S_{m_4} et S_{M_4} de la façon suivante

$$\begin{aligned} S_{m_4} &= \frac{1}{4} \cdot f(0) + \frac{1}{4} \cdot f(\frac{1}{4}) + \frac{1}{4} \cdot f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{4} \cdot f(\frac{3}{4}) \\ S_{M_4} &= \frac{1}{4} \cdot f(\frac{1}{4}) + \frac{1}{4} \cdot f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{4} \cdot f(\frac{3}{4}) + \frac{1}{4} \cdot f(1). \end{aligned}$$

Ce qui donne à peu près l'estimation

$$0,21 < S^* < 0,46.$$

On peut penser à raffiner encore l'intervalle $[0, 1]$ en le divisant en $n = 5; 6; 7; \dots$ sous-intervalles. Pourquoi cette subdivision ? Pour mieux approcher la valeur exacte de S^* par S_{m_n} et S_{M_n}. On remarque que plus le nombre sous-

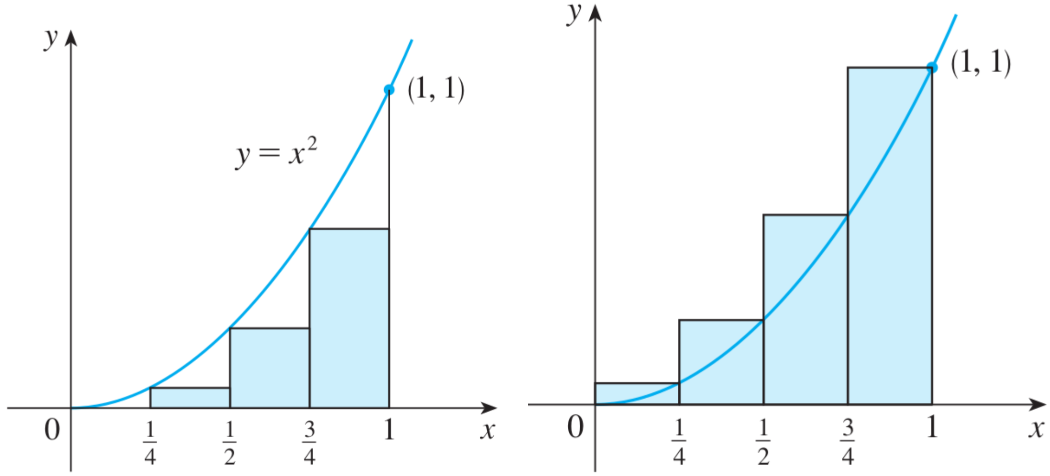


FIGURE 3.2 – Il y a des rectangles "inférieurs" et d'autres "supérieurs".

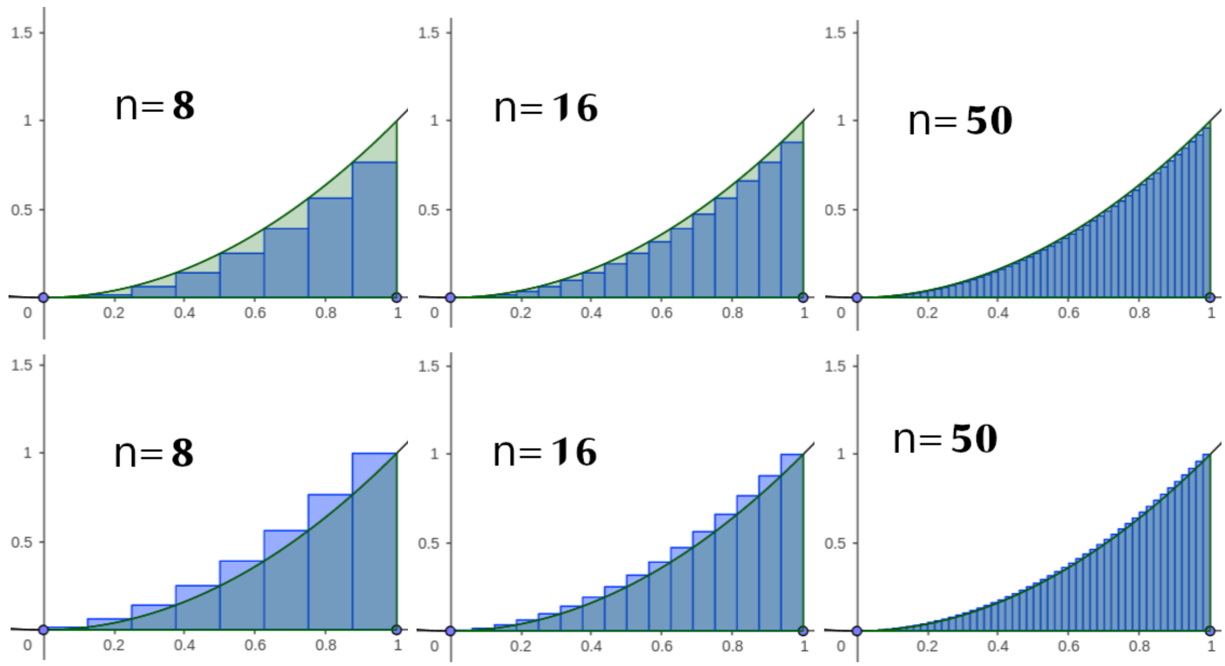


FIGURE 3.3 – De gauche à droite, le nombre de sous-intervalles augmente. Les sommes inférieurs S_{m_n} (première ligne) et supérieurs S_{M_n} s'approchent de S^*

.

intervalles considérés est grand plus la différence entre la surface exacte S^* et la somme des aires des rectangles diminue. On a éventuellement pour $n = 8$ l'estimation $S_{m_8} \simeq 0,27 \leq S^* \leq 0,39 \simeq S_{M_8}$. Quand $n = 16$, on obtient $S_{m_{16}} \simeq 0,30 \leq S^* \leq 0,36 \simeq S_{M_{16}}$. Et pour $n = 50$, $S_{m_{50}} \simeq 0,32 \leq S^* \leq 0,34 \simeq S_{M_{50}}$. L'idée donc pour trouver la valeur exacte de S^* est de faire tendre n vers l'infini. C'est ainsi que se définit la **somme de Riemann** !

Sec 3.2 Intégrale au sens de Riemann

Definition 3.2.1.

Somme de Riemann Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$. On divise cet intervalle en n sous-intervalles de longeur $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. On pose $a = x_0; x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ tels que $x_k = a + k\Delta x$. On considère aussi des points $x_1^*, \ldots, x_n^*$ tels que $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ pour $i = 1, \ldots, n$. On appelle **l'intégrale au sens de Riemann** de f entre a et b la quantité

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \frac{b-a}{n}.$$

Si cette limite existe et est finie, on dit que f est **Riemann intégrable** ou **intégrable au sens de Riemann**.

Proposition 3.2.1.

Si une fonction f est continue sur un intervalle fermé $[a,b]$ alors elle est intégrable au sens de Riemann.

Remarque.
1. *Une fonction peut être continue sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert et pas forcément intégrable. Par exemple, essayez de trouver subdivision et des rectangles avec une somme d'aires finie pour couvrir la surface au-dessous du graphe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0,1]$.*
2. *Une fonction discontinue, peut être intégrable, si les dicosntinuités sont assez "gentils".*
3. *L'intégrale de Riemann se base sur une limite d'une série numérique, c'est à dire que nous vons besoin d'avoir un bagage fort en séries numériques pour pouvoir calculer l'intégrale. Hors, ceci dépasse les objectifs de ce cours. C'est pourquoi que nous avons besoin d'un autre moyen pour surmonter cette difficulté.*

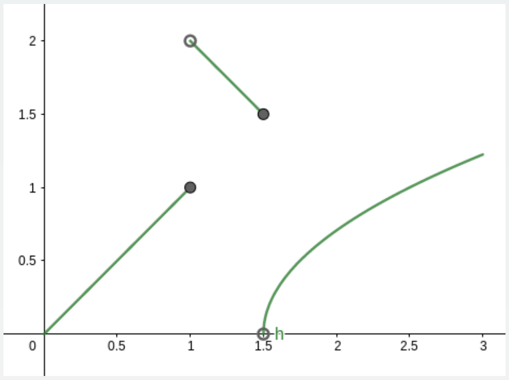
Dans la remarque 2 de la liste des remarques précédentes, il est dit que les discontinuité doivent être "gentils", c'ets une expression qui n'est ni rigoureuse ni mathématique. Mais pour comprendre son sens voici deux exemples.

Example 3.2.1.

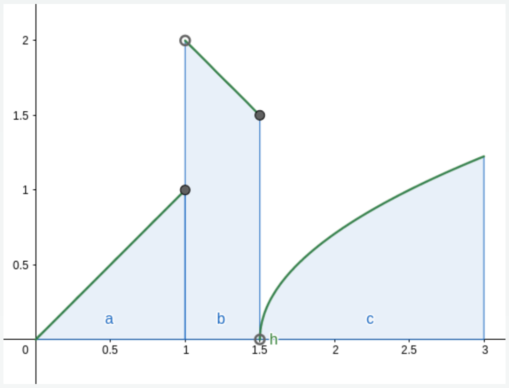
1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,3]$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } \; x \in [0,1], \\ 3-x & \text{si } \; x \in]1, \frac{3}{2}], \\ \sqrt{x - \frac{3}{2}} & \text{si } \; x \in]\frac{3}{2}, 3] \end{cases}$$

La fonction f a deux discontinuités aux points 1 et $\frac{3}{2}$.



Mais ces discontinuités ne présente guère un problème car on obtient facilement l'aire de la surface au- dessous si on la partage en trois parties a,b et c et on traite les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto 3 - x$ et $x \mapsto \sqrt{x - \frac{3}{2}}$.



Problème résolu ! Fonction intégrable.

2. Qu'en est-il de la fonction suivante ?

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \bigcap [0,1], \\ 1 & \text{si} \quad x \in [0,1] \setminus (\mathbb{Q} \bigcap [0,1]) \end{cases},$$

Comme dit Banner dans [**banner2007calculus**], je cite : "C'est une fonction assez étrange. Il y a plein de nombres rationnels et irrationnels entre 0 et 1. En fait, entre tous les deux nombres rationnels, il y a un nombre irrationnel, et entre tous les deux nombres irrationnels, il y a un nombre rationnel ! Les valeurs de $g(x)$ sautent entre les hauteurs 1 et 2 plus rapidement que vous ne pouvez l'imaginer. Il n'y a aucune connectivité dans les segments de ligne ci-dessus aux hauteurs 1 et 2 : ils sont pleins de trous. La fonction est en fait discontinue partout." Alors que devrait représenter $\int_0^1 g(x)dx$ au sens de Riemann ? Quand on essaie de couvrir g par des rectangles supérieurs et inférieurs on échoue à trouver une limite commune des deux ! Donc g n'est pas intégrable au sens de Riemann.

Rassurez-vous, des fonctions "méchantes" comme g ne feront pas l'objet de notre étude dans ce cours. Il est important de noter que l'approche précédentes a été basée sur des exemples où la fonction est positive. Comment alors calculer l'intégrale d'une fonction négative $h(x)$? La question est simple car il suffit de considérer $-h(x)$ qui est positive pour calculer l'intégrale et ensuite multiplier le résultat par -1.

La variable d'intégration est dite "muette" car $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(u)du \ldots$.

Sec 3.3 Propriétés de l'intégrale de Riemann

L'intégrale de Riemann présente des propriétés importantes qu'on peut résumer dans ce qui suit.

Propriété 3.1.

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$
2. $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0.$
3. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$ *(Chasles)*
4. $\displaystyle\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$, *où* $C \in \mathbb{R}$.
5. $\displaystyle\int_a^b Cdx = C \cdot (b-a).$
6. $\displaystyle\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$
7. $\displaystyle\int_a^b f(x) - g(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx.$
8. *Si* $f(x) \geq g(x)$ *alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$. *En particulier,* $f(x) \geq 0$ *alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0.$
9. *Soient* $m \leq M$ *dans* $\mathbb{R}$. *Si* $m \leq f(x) \leq M$, *alors* $m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M \cdot (b-a)$.

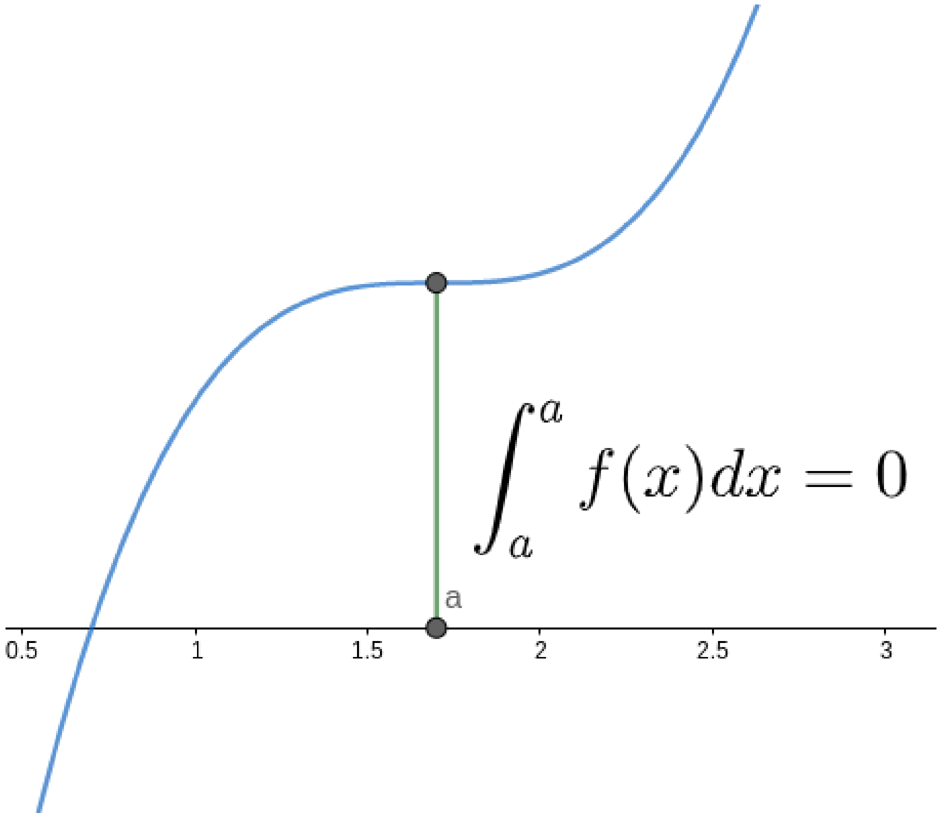
Il y a aussi des propriétés spécifiques eux fonctions impaires et paires.

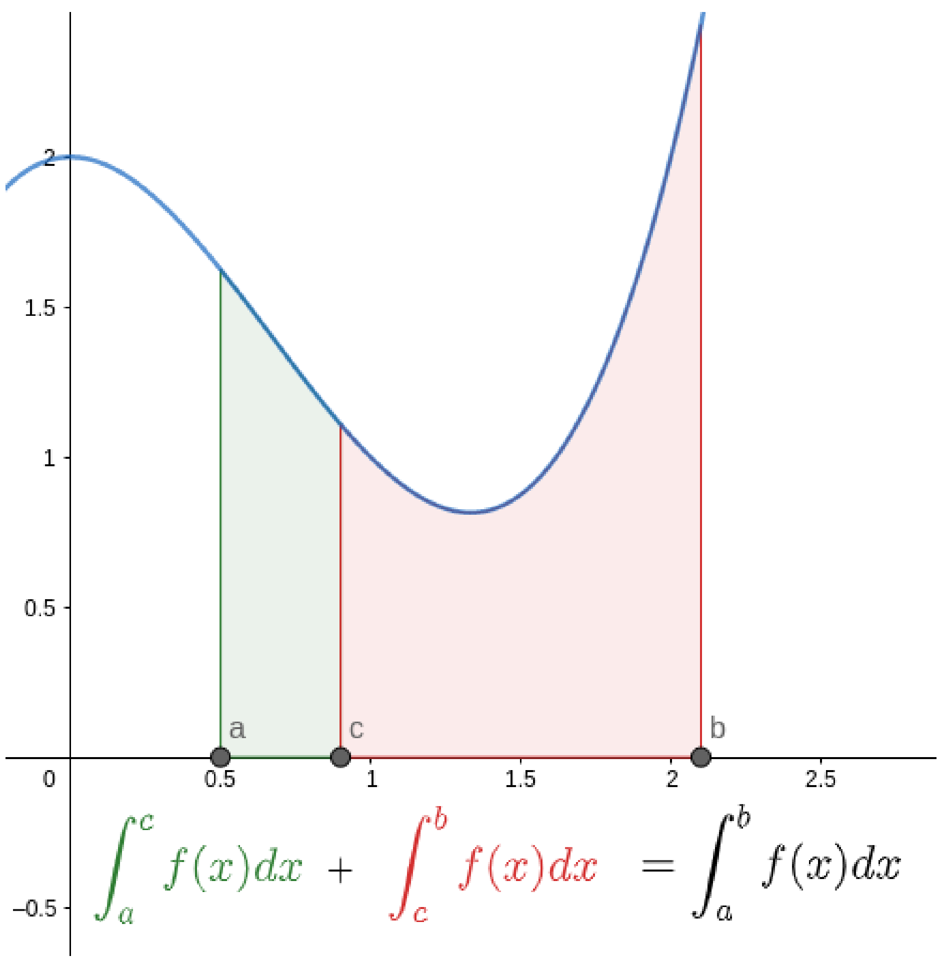
Propriété 3.2. *Soit* $a > 0$ *et* f *une fonction intégrable sur* $I = [-a, a]$.

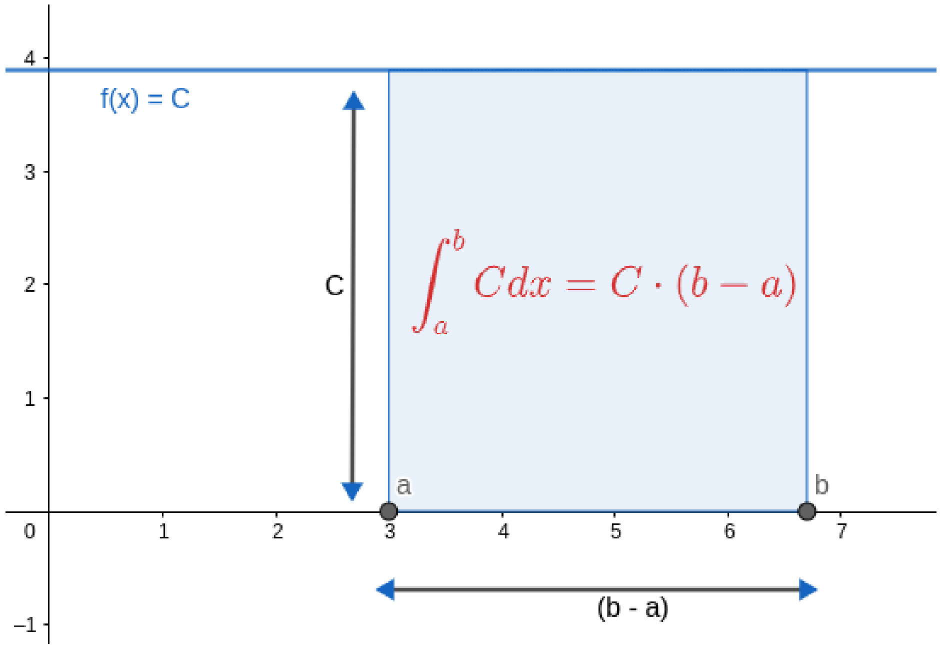
(i) *Si* f *est impaire sur* I *alors* $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$

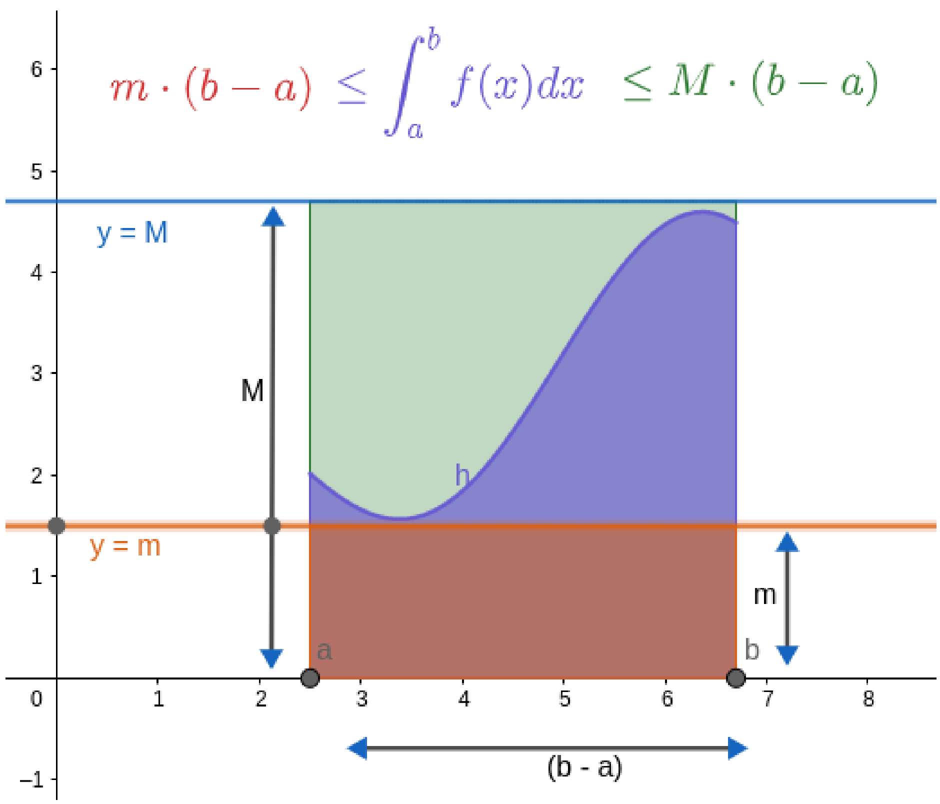
(ii) *Si* f *est paire sur* I *alors* $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$

Voici une démonstration graphique de certaines propriétés précédémment données


$\int_a^a f(x)dx = 0$
a
0.5
1
1.5
2
2.5
3


2
1.5
1
0.5
0
−0.5
a
c
b
0.5
1
1.5
2
2.5
$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$





Attention, l'intégrale n'est pas compatible avec la multiplication et la division !

Sec 3.4 L'intégrale et la dérivation

Comme nous l'avons déjà mentionné, l'utilisation des sommes de Riemann nécessite une connaissance des séries entières. Nous avons besoin d'un outil sophistiqué afin de nous aider à calculer les intégrales de façon plus imple et plus directe. Il s'avère qu'en analyse, ce moyen est considéré fondamental car il mettra en relation deux principes, qui jusqu'à l'instant, n'ont rien de commun entre eux.

Theorem 3.4.1.

Théorème fondamental de l'analyse 1 Si f est continue sur $[a,b]$, alors la fonction g définie telle que

$$g(x) = \int_a^x f(u)du, \qquad \forall x \in [a,b]$$

est une fonction dérivable sur $[a,b]$ et sa dérivée est $g'(x) = f(x)$.

On considère donc que l'intégrale et la dérivée sont des opérations inverse, comme si l'intégrale était une "anti-dérivée". C'est ce qui est clairement illustré par le théorème suivant qui n'est autre qu'une reformulation du précédent.

Theorem 3.4.2.

Théorème fondamental de l'analyse 2 Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ alors f admet une ***primitive*** *F telle que $F'(x) = f$ et on a*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Alors maintenant, nous n'avons plus besoin de connaître des séries numériques dans ce cours pour pouvoir effectuer du calcul intégral simple. En effet, il suffit de bien connaître les dérivées des fonctions usuelles mais aussi les règles de dérivation du produit de deux fonctions,quotient de deux fonctions,composée de deux fonctions .... Traitons l'exemple vu au début de ce chapitre pour connaître précisément la valeur de $S^* = \int_0^1 x^2dx$. En effet, nous cherchons une fonction $F(x)$ telle que si on la dérive on trouve $f(x) = x^2$. On peut penser à $F(x) = x^3$. Sa derivée est $F'(x) = 3x^2$, ce qui est presque ce qu'on veut. Or, on sait que les constantes n'ont pas de sérieux problèmes avec l'intégrale, donc on peut légèrement modifier F pour se débarasser du 3 en dérivant ; on prend $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, cette fois-ci $F'(x) = 3 \cdot \frac{1}{3}x^2 = x^2$ ce qui est bien ce que nous cherchons. Donc, $\int_0^1 x^2 = \frac{1}{3}x^3\Big]_0^1 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3} = 0,3333...$. Maintenant, nous sommes sûrs de la valeur de S^* qui nous était mystérieusement cachée au début de ce chapitre !

Sec 3.5 Intégrales indéfinis

Nous avons jusqu'à maintenant utilisé des intégrales entre deux bornes a et b. Le résultat trouvé est une valeur numérique. Mais, comme nous l'avons vu grâce au théorème fondamental de l'analyse, on doit connaître une fonction "anti-dérivée" pour calculer une intégrale. Ceci dit, quand l'intégrale est spécifiée entre deux bornes précises on parle de **l'intégrale définie**. Sinon, si nous cherchons une famille de fonctions **primitives** sans forcément nous intéresser aux bornes, on parle de **l'intégrale indéfinie** qui est notée $\int f(x)dx$ et qui représente la familles des primitives de f. En effet, si on trouve une fonction $F(x)$ telle que $F'(x) = f(x)$ alors notez que $G(x) = F(x) + C$, où C est une constante, permet d'obtenir la même dérivée. C'est à dire que $G'(x) = F'(x) = f(x)$ car la dérivée d'une constante est nulle. Donc la famille des primitives de f est

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Sec 3.6 Techniques de l'intégration

Intégration par parties

Proposition 3.6.2.

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I. On a la relation suivante sur I.

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx.$$

***Proof*.** Puisque u et v sont continuement dérivables. La fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = u(x)v(x)$ est dérivable sur I et $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. En intégrant les deux membre de l'égalité précédente on obtient $\int f'(x)dx = \int (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))\, dx$. Donc $f(x) = u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx$. Donc

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx.$$

■

Example 3.6.2.

Calculons la primitive de $f(x) = x^2e^x$. Nous allons appliqué l'intégration par parties deux fois. Posons $u(x) = x^2$ et $v'(x) = e^x$ donc $u'(x) = 2x^2$ et $v(x) = e^x$. Alors

$$\int f(x)dx = \int x^2e^xdx = [x^2e^x] - 2\int xe^xdx$$

Posons une deuxième fois $p(x) = x$ et $q'(x) = e^x$ donc $p'(x) = 1$ et $q(x) = e^x$. Alors

$$\int xe^xdx = [xe^x] - \int e^xdx = xe^x - e^x.$$

Finalement,

$$\int x^2e^xdx = x^2e^x - 2\left(xe^x - e^x\right) = \left(x^2 - 2x + 2\right)e^x.$$

Formules de changement de variables pour une primitive

Proposition 3.6.3.

Première formule de changement de variables Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, ϕ une application de I dans J dérivable et f une application de J dans $\mathbb{R}$ continue. Si F est une primitive de $(f \circ \phi) \cdot \phi'$ sur I. On note

$$\int f(\phi(x)) \cdot phi'(x)dx = \left[\int f(t)dt\right]_{t=\phi(x)}$$

, et on dit qu'on a effectué le changement de variables $t = \phi(x)$.

***Proof*.** La preuve est basée sur la dérivée de la comosée de deux fonctions. C'est à dire si $F' = f$

$$(F \circ \phi)' = \phi' \cdot F' \circ \phi = \phi' \cdot f \circ \phi.$$

■

Example 3.6.3.

Calculons la primitive de $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$. On remarque que $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{(x^2+1)'}{\sqrt{x^2+1}}$. Ce qui nous pousse à choisir le changement de variable $t = x^2 + 1$. Alors $\frac{dt}{dx} = 2x$ donc $\frac{1}{2}dt = xdx$ et $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{t}$. Ce qui donne

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int \frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \int (\sqrt{t})'dt = \left[\sqrt{t}\right]_{t=x^2+1} = \sqrt{x^2+1}.$$

Proposition 3.6.4.

Seconde formule de changement de variable On considère les mêmes hypothèses que la proposition 3.6 et en plus, on suppose que ϕ est une bijection de I dans J telle que ϕ soit dérivable de dérivée non-nulle. Si H est une primitive de $(f \circ \phi) \cdot \phi'$ sur I alors $H \circ \phi$ est une primitive de f sur J. On note

$$\int f(t)dt = \left[\int f\big(\phi(x)\big)\phi'(x)dx\right]_{x=\phi^{-1}(t)}.$$

On dit que l'on a effectué le changement de variable $x = \phi^{-1}(t)$.

***Proof*.** La démonstration se base simplement sur la dérivée de la réciproque ϕ^{-1},

$$\forall x \in J, \big(\phi^{-1}(x)\big)' = \frac{1}{\phi'\big(\phi^{-1}(x)\big)}.$$

■

Example 3.6.4.

Calculons la primitive de $f : t \mapsto \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}$ sur $]-1,1[$. On considère $\phi(x) = \sin(x)$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Ainsi, ϕ est dériable et de dérivée $x \mapsto \cos(x)$. On sait que la réciproque de ϕ est $\phi^{-1}(t) = \arcsin(t)$. Ma primitive de f sur $]-1,1[$ est $H \circ \phi^{-1}$ où h est une primitive de $h = (f \circ \phi) \cdot \phi'$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On a

$$h(x) = \frac{\sin^2(x)cos(x)}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} = \frac{\sin^2(x)\cos(x)}{|\cos(x)|} = \sin^2(x),$$

car $\cos(x) > 0$ pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Finalement on obtient

$$\int f(t)dt = \left[\int f(\phi(x))\phi'(x)dx\right]_{x=\phi^{-1}(x)} = \left[\int \sin^2(x)\right]_{x=\phi^{-1}(x)} = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_{x=\arcsin(t)}$$

Alors,

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}\left(\arcsin(t) - \sqrt{1-t^2}\}\right).$$

3.6.1 Résultat de moyenne

La proposition suivante est la version "intégrale" des accroissements finis

Proposition 3.6.5.

Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = f(c).$$

***Proof*.** La preuve est basée sur le théorème des accroissements finis. Puisque f est intégrable, elle admet une primitive F dérivable sur $[a,b]$ donc il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(c),$$

et on sait que $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$ et $F'(c) = f(c)$. Donc

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = f(c).$$

■

Partie II

Nombres complexes, polynômes et Fractions Rationnelles

Cette dernière partie est dédiée au calcul matriciel avec un objectif principal qui est lea résolution des systèmes linéaires par les méthodes de Gauss, Cramer ou inversion de matrices.

4

Calcul Matriciel

Partie II

Illustrated by Ethan Lu

Notes de cours destinés aux étudiants de première année

Morocco

ISBN 978-0-4598-1205-8