Calcul Stochastique - MMA

Partie 2 : Martingales et Processus Stochastiques

Pr. Hamza El Mahjour

Faculté Polydisciplinaire Larache
Université Abdelmalek Essaâdi

Points Principaux

Filtrations et Espérances conditionnelles

Filtrations, processus

Définition

Un **processus stochastique** à valeurs dans $(E, \mathcal{A})$ est une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de v.a à valeurs dans $(E, \mathcal{A})$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Si $\mathcal{F}$ est une tribu, on dit que $\mathcal{A}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$ si $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ qui est également une tribu. On dit parfois que la tribu $\mathcal{A}$ est **plus grossière** que $\mathcal{F}$ (ou bien $\mathcal{F}$ est **plus fine** que $\mathcal{A}$). Si X est une v.a on a l'implication suivante

$$X \subset \mathcal{A} \Rightarrow X \subset \mathcal{F}$$

Une fonction non-mesurable peut être rendue mesurable en choisissant une tribu plus fine.

Exemple

- La plus grossière des tribus est $\{\emptyset, E\}$.
- La plus petite sous-tribu pour que X soit mesurable est

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(A), \quad A \in \mathcal{A}\}.$$

Définition (Filtration)

Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{F}$ une suite croissante de sous-tribus ($\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$). On appelle $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une **filtration**. On dit alors que $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé **filtré**.

Définition (Processus adapté)

On dit que le processus $\{X_n\}$ est adaptée à la filtration $\{\mathcal{F}_n\}$ si pour tout n, X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable.

Exemples

- La filtration minimale d'un processus (X_n) est la **filtration canonique**

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n).$$

- La marche aléatoire symétrique dans $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$. On prend $\Omega = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ (suites infinies). $n-$ième éléments $\to$ $n-$ième pas de la marche.

$$X_n(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i.$$

La tribu associée est $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\{-1, 1\})^{\otimes \mathbb{N}}$. Construisons la filtration naturelle. D'abord $X_0 = 0$. Donc

$$X_0^{-1}(A) = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad 0 \notin A, \\ \Omega & \text{si} \quad 1 \in A. \end{cases}$$

Exemples (suite)

ce qui permet de considérer : $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Pour $n = 1$, on observe $(X_0, X_1)(\Omega) = \{(0, -1), (0, 1)\}$. Ce qui permet de distinguer 4 cas :

$$(X_0, X_1)^{-1}(A) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } (0,-1) \notin A \text{ et } \; (0,1) \notin A, \\ \{\omega : \omega_1 = 1\} & \text{si } (0,-1) \notin A \text{ et } \; (0,1) \in A, \\ \{\omega : \omega_1 = -1\} & \text{si } (0,-1) \in A \text{ et } \; (0,1) \notin A, \\ \Omega & \text{si } (0,-1) \in A \text{ et } \; (0,1) \in A, \end{cases}$$

Donc

$$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{\omega : \omega_1 = -1\}, \{\omega : \omega_1 = 1\}, \Omega\}$$

On continue par un raisonnement analogue pour construire $\mathcal{F}_n$ pour n quelconque.

$\mathcal{F}_1$ contient l'information disponible au temps 1 : On sait distinguer tous les événements dépendant du premier pas de la marche. Les v.a mesurables par rapport à $\mathcal{F}_1$ dépendent uniquement de ω_1.

Espérance conditionnelle

- On travaille sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$.
- $\mathcal{F}_1 \longrightarrow$ info. partielle sur l'espace en observant une v.a X_1.
- $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1] \longrightarrow$ meilleure estimation qu'on peut faire de la valeur de X à l'aide de l'information contenue dans $\mathcal{F}_1$.

Définition

Soit X une v.a réelle sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. On appelle **espérance conditionnelle** de X sachant $\mathcal{F}_1$ et on note $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1]$, toute v.a Y satisfaisant les deux conditions

1. $Y \subset \mathcal{F}_1$, c-à-d Y est $\mathcal{F}_1$- mesurable ;
2. $\forall A \in \mathcal{F}_1, \quad \int_A X \, d\mathbb{P} = \int_A Y \, d\mathbb{P}$.

Remarque

Nous abrégeons $\mathbb{E}[X|\sigma(Z)] = \mathbb{E}[X|Z]$ si Z est une v.a.r de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Théorème

1. *L'espérance conditionnelle* $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1]$ *existe.*
2. *Si* Y *et* Y' *sont deux versions de* $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1]$ *alors* $Y = Y'$ *p.s (unicité)*
3. *On a* $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1]\right] = \mathbb{E}[X]$ *et* $\mathbb{E}\left[\,|\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1]|\,\right] \leq \mathbb{E}[|X|]$*.*

Exemples

- Si X est $\mathcal{F}_1$ mesurable alors $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1] = X$ (contient déjà toute l'info. sur X).
- Si X est indépendante de $\mathcal{F}_1$ alors pour tout $A \in \mathcal{F}_1$ et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mathbb{P}\left(\{X \in B\} \cap A\right) = \mathbb{P}\left(\{X \in B\}\right)\mathbb{P}(A).$$

et puisque $\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X]\mathbb{P}(A)$ alors $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1] = \mathbb{E}[X]$ c'est à dire la meilleure estimation de X est son espérance quand elle est indépendante de la sous-tribu $\mathcal{F}_1$.

Propriétés

L'espérance conditionnelle a les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{E}[aX + Y|\mathcal{F}_1] = a\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1] + \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_1]$. (Linéarité)
2. Si $X \leq Y$ alors $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1] \leq \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_1]$. (Monotonie)
3. Si $X_n \geq 0$ est une suite croissante telle que $X_n \uparrow X$ avec $\mathbb{E}[X] < \infty$ alors $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_1] \uparrow \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1]$. (Convergence monotone)
4. Si φ est convexe et $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[|\varphi(X)|]$ sont finies alors
$$\varphi\left(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1]\right) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)|\mathcal{F}_1]. \qquad (Jensen)$$
5. Soit $p \geq 1$: $\mathbb{E}\left[|\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1]|^p\right] \leq \mathbb{E}[|X|^p]$. (Contraction dans $\mathbb{L}^p$)

Proposition

Si $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, *alors*

1. $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1]|\mathcal{F}_2\right] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1]$;
2. $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_2]|\mathcal{F}_1\right] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1]$.

Démonstration.

1. Notons que $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1]$ est $\mathcal{F}_2-$mesurable. Donc $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1]|\mathcal{F}_2] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1]$.
2. Puisque $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, on a, par définition de des espérances conditionnelles $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1]$ et $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_2]$ pour tout $A \in \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$

$$\int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1]d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_2]d\mathbb{P}.$$

suite de la démo.

De plus pour tout $A \in \mathcal{F}_1$

$$\int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_2]d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1]d\mathbb{P},$$

donc

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_2]|\mathcal{F}_1] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1]|\mathcal{F}_1],$$

et puisque $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1]$ est $\mathcal{F}_1$-mesurable donc $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1]|\mathcal{F}_1] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1]$. $\blacksquare$

Martingales

Dans ce qui suit, on va voir ensemble les martingales.
On s'intéresse à un résultat de convergence des martingales.

Définition

Une suite de v.a des appelée une **martingale** sur $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n)$ si

(i) $\mathbb{E}[|\mathcal{M}_n|] < \infty$.

(ii) $(\mathcal{M}_n)$ est $(\mathcal{F}_n)$-adapté.

(iii) $\mathbb{E}[\mathcal{M}_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathcal{M}_n$

- surmartingale ==> (i) + (ii) + $\mathbb{E}[\mathcal{M}_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq \mathcal{M}_n$.
- sous-martingale ==> (i) + (ii) + $\mathbb{E}[\mathcal{M}_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq \mathcal{M}_n$.
- Si $\mathcal{M}_n$ est adapté à $\mathcal{F}_n$ ==> adapté à $\sigma = (\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_n)$.
- $\mathbb{E}[\mathcal{M}_{n+m}|\mathcal{F}_n] = \mathcal{M}_n$.

Exemple (1) Marche Aléatoire (1)

Soit X_i des v.a i.i.d avec $\mathbb{E}[X_i] = 0, \forall i$, $S_0 = 0$.
$S_n = S_{n-1} + X_n$ avec la filtration $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n), \forall n \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[S_n + X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E}[S_n|\mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E}[S_n]. \end{aligned}$$

Si $\mathcal{M}_i$ est une martingale, on définit le processus des **différences de martingales** : $Y_i = \mathcal{M}_i - \mathcal{M}_{i-1}$. Notez que : $\mathbb{E}[Y_i|\mathcal{F}_{i-1}] = 0$ et $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_0 + \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

Dans l’exemple précédent nous n’avons pas eu besoin du fait d’avoir la même loi

Exemple (2) Produit aléatoire (2)

Soit X_i i.i.d , $X_i > 0$ et $\mathbb{E}[X_i] = 1$. Poser $\mathcal{P}_0 = 1$ et $\mathcal{P}_n = \prod_{i=1}^n X_i$.
$\rightarrow$ $\mathcal{P}_n$ est une martingale sur la filtration canonique $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.
$\rightarrow$ En particulier, on considère la suite (X_i) t.q $\mathbb{P}(\{X_i = 0\} = 1/2$ et $\mathbb{P}(\{X_i = 2\} = 1/2$. Il est clair que $\mathbb{E}(X_i) = 1$ pour tout i.
On voit bien dans ce cas particulier que $\mathbb{E}[\prod_{i=1}^n X_i] = 1$.
C’est contre-intuitif !
On peut montrer que $\mathcal{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{L}^1} 0$ or $\mathcal{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} 1$.

Exemple (3)

Soit X une v.a intégrable et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration. $Z_n = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$ est une martingale. En effet,

$$\mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{n+1}]|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] = Z_n.$$

Maintenant un exemple avec des sous-martingales.

Exemple

Si Z_n est une sous-martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)$ et f est un fonction convexe avec $\mathbb{E}[|f(Z_n)|] < \infty$. Alors $f(Z_n)$ est une sous-martingale adaptée à $\mathcal{F}_n$. Pour prouver l'inégalité précédente, on se base sur l'inégalité de Jensen (pour les espérances conditionnelles), c-à-d

$$\varphi(\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)|\mathcal{B}].$$

pour toute tribu sous-tribu $\mathcal{B}$, et X une v.a de carrée intégrable et φ convexe.

Applications de l'exemple précédents : $|Z_n|^p, (Z_n - a)^+$... sont des martingales.

Transformée de martingale

$X \in \mathcal{F}$ veut dire $\mathcal{F}$-mesurable.

Définition

1. Soit $(\mathcal{F}_n)$ une filtration, un processus H_n est **prévisible** si $H_n \in \mathcal{F}_{n-1}$ pour tout n
2. Si Z_n est une martingale

$$(H \cdot Z)_n = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} H_k (Z_k - Z_{k-1}) & \text{si} \quad n \geq 1, \\ 0 & \text{si} \quad n = 0. \end{cases}$$

- La transformée représente en quelque sorte la "version discrète" d'une intégrale stochastique $\int HdB$?

D'où vient le nom : martingale ?

- C'est relié au "jeux de hasard" (qui sont illicites bien sûr). Soit X_i un jeu d'argent consistant à miser 1 euro ou gagner ou perdre un euro. Donc le gain réalisé (peut être négatif).

- $\mathbb{P}(\{X_i = 1\}) = \mathbb{P}(\{X_i = -1\}) = 1/2$. Parier H_k au $k - me$ tour, Gain réalisé : $H_k \cdot X_k$.

- Poser $Z_k = Z_0 + \sum_{i=1}^{k}$.

- Le gain total au $n-$ème tour $(H \cdot Z)_n = \sum_{k=1}^{n} H_k(Z_k - Z_k - 1)$.

- Intuitivement, on peut dire que H_k est prévisible car tu vas miser une somme pour le prochain tour selon le résultat du tour actuel. - $H_{k+1} \in \sigma(X_1, \ldots, X_k)$

- Idée de martingale : miser le double à chaque fois que vous perdez, si vous gagnez vous arrêtez !

L'idée précédente peut ainsi se modéliser

$$H_n = \begin{cases} 2H_{n-1}, & \text{si} \quad X_{n-1} = -1, \\ 0, & \text{si} \quad X_{n-1} = +1. \end{cases}$$

Imaginez que $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = -1; X_{n+1} = 1.$
Alors le gain réalisé est (si on commence par miser 1 dollar) :

$$-1 - 2 - 2^2 - 2^3 - \ldots - 2^{n-1} + 2^n = 1.$$

On gagne c'est sûr ... mais pas grand chose ... et en plus il y a un problème !

Théorème

Supposons que Z_n est une sous-martingale, $H_n \geq 0$ un processus prévisible t.q $H_n \leq C_n$ p.s. Alors $(H \cdot Z)_n$ est une sous-martinagle

Si Z_n est une martingale on obtient que

$$\mathbb{E}[H_n(Z_n - Z_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}] = 0.$$

Donc si on arrête le jeu après n tours (finis) alors le gain moyen réalisé est 0 donc pour garantir de gagner on a besoin d'un temps infini et d'argent infini

Montrons maintenant que la transformée d'une martingale est bien une martinagle

Démonstration.

On a $\mathbb{E}[(H\cdot Z)_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[(H\cdot Z)_n + H_{n+1}(Z_{n+1} - Z_n)|\mathcal{F}_n]$. Par linéarité et parce que $(H \cdot Z)_n$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable on obtient

$$...... = (H \cdot Z)_n + \mathbb{E}[H_{n+1}(Z_{n+1} - Z_n)|\mathcal{F}_n] = (H \cdot Z)_n$$

En fait, on peut décider d'arrêter de parier à un certain "temps non-déterministe".
On parle alors d'un nouveau concept qui est le suivante

Définition (Temps d'arrêt)

Soit $\mathcal{F}_n$ une filtration. On dit que $\mathcal{N} : \Omega \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ est un **temps d'arrêt** si $\{\omega : \mathcal{N}(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout n

Théorème

Si $\mathcal{N}$ est un temps d'arrêt et Z_n une sous-martingale alors $Z_{\mathcal{Z}\wedge n}$ est une sous-martingale

On pose $\mathcal{U}_n = \sup\{k : \mathcal{N}_{2k} \leq n\}$ N'oublions pas que notre but est un théorème de convergence

Théorème

Si Z_n est une sous-martingale alors

$$(b-a)\mathbb{E}[\mathcal{U}_n] \leq \mathbb{E}[(Z_n - a)^+] - \mathbb{E}[(Z_0 - a)^+].$$

Démonstration ....

Théorème

Soit Z_n une sous-martingale, $\sup[Z_n^+] < \infty$ *alors* $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} Z$ *avec* $\mathbb{E}[|Z|] < \infty$.