Calcul Stochastique Appliqué à la Finance - 4ème GF

Modèles à temps discret III

Pr. El Mahjour

Plan

Marchés Complets

Mesure neutre au risque

Définition

Une mesure de probabilité est dite $\mathbb{P}^*$ est dite neutre au risque, si le rendement espéré de chaque actif risqué est égal au rendement r de l'actif sans risque, i.e

$$\mathbb{E}^*[S_{t+1}^{(i)} | \mathcal{F}_t] = (1+r)S_t^{(i)}, \tag{1}$$

pour $t = 0, 1, \ldots, N-1$ et $i = 0, 1, \ldots, d$.
$\mathbb{E}^*$ est l'espérance sous la probabilité $\mathbb{P}^*$.

- $S_t^{(i)} \in \mathcal{F}_t$ par construction.
- On réécrit (1) :

$$\mathbb{E}^* \left[\frac{S_{t+1}^{(i)} - S_t^{(i)}}{S_t^{(i)}} | \mathcal{F}_t \right] = r, \qquad t = 0, \ldots, N-1.$$

avec $\tilde{r} > r$.

- On peut réexprimer la notion de $\mathbb{P}^*$ avec des martingales.

Proposition

Une mesure de probabilité $\mathbb{P}^*$ est neutre au risque <u>ssi</u> le processus des prix actualisés $X_t^{(i)}$ est une martingale sous $\mathbb{P}^*$, i.e

$$\mathbb{E}^* \left[X_{t+1}^{(i)} | \mathcal{F}_t \right] = X_t^{(i)}, \tag{2}$$

pour $t = 0, 1, \ldots, N-1$ *et* $i = 0, 1, \ldots, d$.

- Comme on a déjà vu pour le modèle à deux temps

- On énonce le theorème fondamental n°1 de la finance mathématique sur la vérification de l'arbitrage.

Absence de l’arbitrage / viabilité

- Notons que

marché viable = marché sans opportunité d’arbitrage

Théorème

Un marché est viable <u>ssi</u> s’il admet au moins l’existence d’une mesure de probabilité neutre au risque.

Marchés Complets

Bien Contingent $\leftrightarrow$ Revendication Contingente $\leftrightarrow$ Actif Conditionnel

Stratégie de portefeuille $\leftrightarrow$ Stratégie de gestion de portefeuille $\leftrightarrow$ Stratégie

Marchés Complets

Bien Contingent $\leftrightarrow$ Revendication Contingente $\leftrightarrow$ Actif Conditionnel

Stratégie de portefeuille $\leftrightarrow$ Stratégie de gestion de portefeuille $\leftrightarrow$ Stratégie

Marchés Complets

Bien Contingent $\leftrightarrow$ Revendication Contingente $\leftrightarrow$ Actif Conditionnel

Stratégie de portefeuille $\leftrightarrow$ Stratégie de gestion de portefeuille $\leftrightarrow$ Stratégie

Définition (Actif conditionnel atteignable)

On dit qu'un actif conditionnel à bénéfice C est atteignable (ou simulable) à l'échéance $t = N$ s'il existe une stratégie $(\bar{\xi}_t)_{t=1,\dots,N}$ t.q

$$C = \bar{\xi}_N \cdot \bar{S}_N. \tag{3}$$

- Si une telle stratégie vérifiant (3) existe

- Alors on dit aussi que $\bar{\xi}_t$ couvre C.

- $\bar{\xi}_N \cdot \bar{S}_N \geq C \rightarrow$ super-couverture

- C couverte par $\bar{\xi}_t \implies$ prix d'arbitrage $\pi_t(C) = \bar{\xi}_t \cdot \bar{S}_t$

Définition (Marché Complet)

Un modèle de marché est **complet** si chaque actif conditionnel est atteignable.

On formule maintenant le théorème fondamental n°2 de math-finance

Théorème

Un modèle de marché viable est complet <u>ssi</u> il existe une unique mesure de probabilité $\mathbb{P}^*$ neutre au risque.