Calcul Stochastique Appliqué à la Finance - 4ème GF

Modèles à temps discret II

Pr. El Mahjour

Plan

Valeur du portefeuille

On dénotera $V_t := \bar{\xi}_t \cdot \bar{S}_t$. Sa valeur aux temps $t = 1, \ldots, N$, avec

$$V_t = \bar{\xi}_{t+1} \cdot \bar{S}_t, \qquad t = 0, \ldots, N-1,$$

Par la condition d'auto-financement, en particulier :

$$V_0 = \bar{\xi}_1 \cdot \bar{S}_0.$$

Soit aussi $\bar{X}_t := (X_t^{(0)}, X_t^{(1)}, \ldots, X_t^{(d)})$ le **le vecteur de prix des actifs actualisés** où

$$X_t^{(i)} = \frac{1}{(1+r)^t} S_t^{(i)}$$

Ou bien

$$\bar{X}_t = \frac{1}{(1+r)^t} \bar{S}_t$$

La **valeur actualisée** à $t = 0$ est

$$\tilde{V} = \frac{1}{(1+r)^t} V_t, \qquad t = 0, \ldots, N$$

Par des calculs simples on peut trouver la relation

$$\tilde{V}_t = \bar{\xi}_t \cdot \bar{X}_t, \qquad t = 1, \ldots, N$$

et

$$\tilde{V}_0 = \bar{\xi}_1 \cdot X_0.$$

L'effet de la mise à jour de de t à 0 est de diviser par $(1+r)^t$ pour les rendre comparable aux prix à $t = 0$.

Arbitrage

Comme on a fait dans le modèles à deux temps $t = 0$ et $t = 1$ on définira l'arbitrage

Définition

Une stratégie de portefeuille $(\bar{\xi}_t)_{t=1,\ldots,N}$ constitue une opportunité d'arbitrage si les trois conditions sont satisfaites :

(i) $V_0 \leq 0$, (commencer d'une dette ou 0)

(ii) $V_N \geq 0$, (clôturer avec une somme positive)

(iii) $\mathbb{P}(\{V_N > 0\} > 0$ (profit positif avec une probabilité non nulle)

Martingales et espérance conditionnelle

Bon, les martingales.

Bon, les martingales.

D’abord on découvre ensemble l’**espérance conditionnelle** dans sa forme générale.

Bon, les martingales.

D’abord on découvre ensemble l’**espérance conditionnelle** dans sa forme générale.

Blablablement parlé, la valeur estimée d’un actif risqué dépend des **informations** dont on dispose.

Bon, les martingales.

D’abord on découvre ensemble l’**espérance conditionnelle** dans sa forme générale.

Blablablement parlé, la valeur estimée d’un actif risqué dépend des **informations** dont on dispose.

Le revenu espéré d’un investissement "real estate" dépend de la localisation de l’appartement ou du terrain.

Dans le cadre probabiliste, l'information disponible est capsulée dans une collection d'événements $\mathcal{G}$ qui peut être inclus dans $\mathcal{F}$ de l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

On notera $\mathbb{E}[F|\mathcal{G}]$ l'espérance conditionnelle de la v.a.r F sachant l'information disponible dans $\mathcal{G}$.

Ou plus précisément **l'espérance conditionnelle de F sachant $\mathcal{G}$.**

En quelque sorte, $\mathbb{E}[F|\mathcal{G}]$ représente la meilleure estimation qu'on peut faire en "moindres-carrés" de la valeur de F connaissant l'information disponible dans $\mathcal{G}$.

Soit $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ des sous-tribus de $\mathcal{F}$, F et G deux v.a.r .
Sans construire rigoureusement $\mathbb{E}[.|\mathcal{G}]$, sachez que l'espérance conditionnelle vérifie

Soit $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ des sous-tribus de $\mathcal{F}$, F et G deux v.a.r .
Sans construire rigoureusement $\mathbb{E}[.|\mathcal{G}]$, sachez que l'espérance conditionnelle vérifie

(i) $\mathbb{E}[FG|\mathcal{G}] = G\mathbb{E}[F|\mathcal{G}]$ si G dépend uniquement de l'information contenue dans $\mathcal{G}$.

Soit $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ des sous-tribus de $\mathcal{F}$, F et G deux v.a.r .
Sans construire rigoureusement $\mathbb{E}[.|\mathcal{G}]$, sachez que l'espérance conditionnelle vérifie

(i) $\mathbb{E}[FG|\mathcal{G}] = G\mathbb{E}[F|\mathcal{G}]$ si G dépend uniquement de l'information contenue dans $\mathcal{G}$.

(ii) $\mathbb{E}[G|\mathcal{G}] = G$ si G dépend uniquement de l'information contenue dans $\mathcal{G}$.

Soit $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ des sous-tribus de $\mathcal{F}$, F et G deux v.a.r .
Sans construire rigoureusement $\mathbb{E}[.|\mathcal{G}]$, sachez que l'espérance conditionnelle vérifie

(i) $\mathbb{E}[FG|\mathcal{G}] = G\mathbb{E}[F|\mathcal{G}]$ si G dépend uniquement de l'information contenue dans $\mathcal{G}$.

(ii) $\mathbb{E}[G|\mathcal{G}] = G$ si G dépend uniquement de l'information contenue dans $\mathcal{G}$.

(iii) $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[F|\mathcal{H}]|\mathcal{G}\right] = \mathbb{E}[F|\mathcal{G}]$ si $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ appelée "propriété de la tour"

Soit $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ des sous-tribus de $\mathcal{F}$, F et G deux v.a.r .
Sans construire rigoureusement $\mathbb{E}[.|\mathcal{G}]$, sachez que l'espérance conditionnelle vérifie

(i) $\mathbb{E}[FG|\mathcal{G}] = G\mathbb{E}[F|\mathcal{G}]$ si G dépend uniquement de l'information contenue dans $\mathcal{G}$.

(ii) $\mathbb{E}[G|\mathcal{G}] = G$ si G dépend uniquement de l'information contenue dans $\mathcal{G}$.

(iii) $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[F|\mathcal{H}]|\mathcal{G}\right] = \mathbb{E}[F|\mathcal{G}]$ si $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ appelée "propriété de la tour"

(iv) $\mathbb{E}\left[F|\mathcal{G}\right] = \mathbb{E}[F]$ si F est indépendant de l'information contenue dans $\mathcal{G}$.

Soit $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ des sous-tribus de $\mathcal{F}$, F et G deux v.a.r .
Sans construire rigoureusement $\mathbb{E}[.|\mathcal{G}]$, sachez que l'espérance conditionnelle vérifie

(i) $\mathbb{E}[FG|\mathcal{G}] = G\mathbb{E}[F|\mathcal{G}]$ si G dépend uniquement de l'information contenue dans $\mathcal{G}$.

(ii) $\mathbb{E}[G|\mathcal{G}] = G$ si G dépend uniquement de l'information contenue dans $\mathcal{G}$.

(iii) $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[F|\mathcal{H}]|\mathcal{G}\right] = \mathbb{E}[F|\mathcal{G}]$ si $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ appelée "propriété de la tour"

(iv) $\mathbb{E}\left[F|\mathcal{G}\right] = \mathbb{E}[F]$ si F est indépendant de l'information contenue dans $\mathcal{G}$.

(v) Si G dépend de $\mathcal{G}$ uniquement et F est indépendante de $\mathcal{G}$ alors

$$\mathbb{E}\left[h(F, G)|\mathcal{G}\right] = \mathbb{E}\left[h(x, F)\right]_{x=G}$$

Filtrations

La totalité des informations disponibles présentes sur le marché jusqu'à l'instant $t = 0, \ldots, N$ sera notée $\mathcal{F}_t$.

Si on assume $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$ pour $t = 0, \ldots, N-1$, on peut le traduire par le fait que l'information disponible sur le marché est croissante. Ainsi la famille $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq N}$ forme une **filtration**.

En général, $\mathcal{F}_t$ correspondera à savoir les valeurs du vecteur S_t.

Mathématiquement, $\mathcal{F}_t$ est générée par $(S_0^{(i)}, S_1^{(i)}, \ldots, S_t^{(i)})$ et on écrit

$$\mathcal{F}_t = \sigma(S_0^{(i)}, S_1^{(i)}, \ldots, S_t^{(i)})$$

La notation $\mathcal{F}_t$ s'avère importante sur deux aspects :

- Représenter l'information disponible à l'instant t.
- Représenter différents types d'informations selon l'agent/l'intervenant dans le marché.

Par exemple, une personne **interne** aurait accès à une filtration $(\mathcal{G}_t)_{0\leq t\leq N}$ plus riche que la filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq N}$ dont dispose un **journaliste**.

Mathématiquement $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t, \quad t = 0, \ldots, N$. On dit que $\mathcal{G}_t$ est plus fine que $\mathcal{F}_t$.

La notation $\mathcal{F}_t$ s'avère importante sur deux aspects :

- Représenter l'information disponible à l'instant t.
- Représenter différents types d'informations selon l'agent/l'intervenant dans le marché.

Par exemple, une personne **interne** aurait accès à une filtration $(\mathcal{G}_t)_{0\leq t\leq N}$ plus riche que la filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq N}$ dont dispose un **journaliste**.

Mathématiquement $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t, \quad t = 0, \ldots, N$. On dit que $\mathcal{G}_t$ est plus fine que $\mathcal{F}_t$.

Au départ, on suppose qu'aucune information n'est disponible à l'instant $t = 0$, ce qui peut être traduit comme : $\mathbb{E}[F|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[F]$.

Toutes mes propriétés que nous avons vu pour l'espérance conditionnelle sont valables avec la filtration $(\mathcal{F}_t)$. En particulier

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[F|\mathcal{F}_{t+1}]|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}[F|\mathcal{F}_t] \tag{1}$$

Savez-vous pourquoi ?

Toutes mes propriétés que nous avons vu pour l'espérance conditionnelle sont valables avec la filtration $(\mathcal{F}_t)$. En particulier

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[F|\mathcal{F}_{t+1}]|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}[F|\mathcal{F}_t] \tag{1}$$

Savez-vous pourquoi ?

Toutes mes propriétés que nous avons vu pour l'espérance conditionnelle sont valables avec la filtration $(\mathcal{F}_t)$. En particulier

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[F|\mathcal{F}_{t+1}]|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}[F|\mathcal{F}_t] \tag{1}$$

Savez-vous pourquoi ?

$\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$.

Toutes mes propriétés que nous avons vu pour l'espérance conditionnelle sont valables avec la filtration $(\mathcal{F}_t)$. En particulier

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[F|\mathcal{F}_{t+1}]|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}[F|\mathcal{F}_t] \tag{1}$$

Savez-vous pourquoi ?

$\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$.

Rappelez-vous bien de ça ! 

Martingales Discrètes

Une martingale est un processus dont la valeur à l'instant $t+1$ peut être estimé en utilisant l'espérance conditionnelle sachant sa valeur à l'instant t.

Définition

Soit $(M_t)_{0\leq t\leq N-1}$. On dit que M_t est une martingale discrète $\mathcal{F}_t-$adapté et satisfait la propriété essentielle

$$\mathbb{E}[M_{t+1}|\mathcal{F}_t] = M_t, \qquad t = 0, 1, \dots, N-1$$

Le fait que M_t est $\mathcal{F}_t-$adaptée veut dire que M_t dépend de $\mathcal{F}_t$ uniquement pour chaque t. On écrit $M_t \in \mathcal{F}_t$.

En termes simplistes, une martingale donne une information au moment $t+1$ que la meilleure estimation qu'on peut faire est sa valeur en t.

Processus prévisible

Un processus stochastique $(\xi_k)_{k\geq 0}$est prévisible si ξ_k dépend uniquement de l'information contenue dans $\mathcal{F}_{k-1}$, $k \geq 1$. En particulier, ξ_0 est une constante.

Voici un résultat important

Proposition

Étant donnée $(X_t)_{t=0\ldots N}$ une martingale et $(\xi_k)_{k=0\ldots N}$ un processus de carré sommable. Le processus à temps discret défini tel que

$$M_t = \sum_{k=1} t\xi_k(X_k - X_{k-1}), \quad t \in \mathbb{N},$$

est une martingale