Calcul Stochastique Appliqué à la Finance - 4ème GF

Neutralité au risque , revendications, Complétude

Pr. El Mahjour

Plan

Mesures neutres au risque

Imagine qu'on t'offre la proposition suivante

- Tu obtiens 500 DH sûrement
- Tu obtiens 1000 DH avec une probabilité 50% et 0 DH sinon

Quelle offre choisiras-tu ?

Imagine qu'on t'offre la proposition suivante

- Tu obtiens 500 DH sûrement
- Tu obtiens 1000 DH avec une probabilité 50% et 0 DH sinon

Quelle offre choisiras-tu ?

En effet, les mesures à risque neutre ne fait pas de distinction entre les deux !

Imagine qu'on t'offre la proposition suivante

- Tu obtiens 500 DH sûrement
- Tu obtiens 1000 DH avec une probabilité 50% et 0 DH sinon

Quelle offre choisiras-tu ?

En effet, les mesures à risque neutre ne fait pas de distinction entre les deux !

Car : $50 \times 100\% = 500$, et $1000 \times 50\% + 0 \times 50\% = 500$.

- Pour mieux aborder l'absence de l'arbitrage.

- Dans le cadre de la tarification des dérivées financiers.

- La définition suivante affirme que

Définition

Une mesure de probabilité $\mathbb{P}^*$ sur Ω est dite **neutre au risque** si

$$\mathbb{E}^*[S^{(i)}] = (1+r)\pi^{(i)}, \qquad i = 0, 1, \ldots, d$$

- Pour mieux aborder l'absence de l'arbitrage.

- Dans le cadre de la tarification des dérivées financiers.

- La définition suivante affirme que sous une mesure neutre au risque (probabilité), les actifs risqués n° $1, 2, \ldots d$ ont le même revenu moyen de l'actif non risqué n° 0

Définition

Une mesure de probabilité $\mathbb{P}^*$ sur Ω est dite **neutre au risque** si

$$\mathbb{E}^*[S^{(i)}] = (1+r)\pi^{(i)}, \qquad i = 0, 1, \ldots, d$$

D'un autre côté, sous la probabilité $\mathbb{P}^\sharp$ de **risque premium** la valeur estimé de l'actif risqué $S^{(i)}$ sera supérieur à r

a - Le premier théorème fondamental de la finance mathématique permet de vérifier l'existence de l'arbitrage

- On dit que deux mesures de probabilité $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}^*$ sont équivalente si $\mathbb{P}(A) = 0 \iff \mathbb{P}^*(A) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{F}$.

Théorème

Un marché est sans opportunité d'arbitrage ssi elle admet au moins un mesure équivalente $\mathbb{P}^*$ neutre au risque.

D’un autre côté, sous la probabilité $\mathbb{P}^\sharp$ de **risque premium** la valeur estimé de l’actif risqué $S^{(i)}$ sera supérieur à r

$$\mathbb{E}^\sharp[S^{(i)}] > (1+r)\pi^{(i)}, \qquad u = 1, \ldots, d$$

a - Le premier théorème fondamental de la finance mathématique permet de vérifier l’existence de l’arbitrage

- On dit que deux mesures de probabilité $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}^*$ sont équivalente si $\mathbb{P}(A) = 0 \iff \mathbb{P}^*(A) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{F}$.

Théorème

Un marché est sans opportunité d’arbitrage ssi elle admet au moins un mesure équivalente $\mathbb{P}^*$ neutre au risque.

Couverture des revendications contingentes

Revendications contingentes

Que sont les revendications contingentes ?

Revendications contingentes

Que sont les revendications contingentes ?

- C’est un contrat financier dont le paiement dépend de la réalisation d’un événement futur.

- Par exemple : options, contrats à terme, swaps, CDS.

- Utilisées pour couvrir d’autres risques ou spéculer sur les prix futurs des actifs.

Exemple de revendication contingente

- Un agriculteur achète une "assurance-récolte" pour se protéger contre le risque d’une sécheresse.

- L’"assurance-récolte" est une revendication contingente car son paiement dépend de la réalisation d’un événement futur, à savoir la sécheresse.

Mathématiquement , dans le contexte des options

Puisque ça dépend d'un événement futur avec une certaine probabilité, le meilleur candidat est le suivant !

Définition

Une revendication contingente est une variable aléatoire $C \geq 0$.

En pratique, la v.a C représente le bénéfice réalisé d'une option (contrat) à l'instant $t = 1$.

Un "Call Européenn" de date d'échéance $t = 1$ pour l'actif n° i est une revendication contingente dont le bénéfice C est donnée par

$$C = (S^{(i)} - K)^{+} = \begin{cases} S^{(i)} - K & \text{si} \quad S^{(i)} \geq K \\ 0 & \text{si} \quad S^{(i)} < K \end{cases}$$

$K \rightarrow$ Prix d'exercice.

Définition

Une revendication contingente avec un profit C est dite réalisable s'il existe une stratégie de portefeuille ξ telle que $C = \xi \cdot \bar{S}$.

Pourquoi on veut savoir si C est réalisable ?

Définition

Une revendication contingente avec un profit C est dite réalisable s'il existe une stratégie de portefeuille ξ telle que $C = \xi \cdot \bar{S}$.

Pourquoi on veut savoir si C est réalisable ? Parce que le Trader sera capable de :

Définition

Une revendication contingente avec un profit C est dite réalisable s'il existe une stratégie de portefeuille ξ telle que $C = \xi \cdot \bar{S}$.

Pourquoi on veut savoir si C est réalisable ? Parce que le Trader sera capable de :

1. À l'instant $t = 0$, construire un portefeuille $\bar{\xi} = (\xi^{(0)}, \dots, \xi^{(d)}) \in \mathbb{R}^{d+1}$.

Définition

Une revendication contingente avec un profit C est dite réalisable s'il existe une stratégie de portefeuille ξ telle que $C = \xi \cdot \bar{S}$.

Pourquoi on veut savoir si C est réalisable ? Parce que le Trader sera capable de :

1. À l'instant $t = 0$, construire un portefeuille $\bar{\xi} = (\xi^{(0)}, \ldots, \xi^{(d)}) \in \mathbb{R}^{d+1}$.
2. Investir le montant : $\bar{\xi} \cdot \bar{\pi} = \sum_{i=1}^{d} \xi^{(i)} \pi^{(i)}$ dans ce portefeuille à $t = 0$.

Définition

Une revendication contingente avec un profit C est dite réalisable s'il existe une stratégie de portefeuille ξ telle que $C = \xi \cdot \bar{S}$.

Pourquoi on veut savoir si C est réalisable ? Parce que le Trader sera capable de :

1. À l'instant $t = 0$, construire un portefeuille $\bar{\xi} = (\xi^{(0)}, \ldots, \xi^{(d)}) \in \mathbb{R}^{d+1}$.
2. Investir le montant : $\bar{\xi} \cdot \bar{\pi} = \sum_{i=1}^{d} \xi^{(i)} \pi^{(i)}$ dans ce portefeuille à $t = 0$.
3. Payer la revendication contingente C à $t = 1$ en utilisant la valeur $\bar{\xi} \cdot \bar{S}$ du portefeuille.

Pour atteindre une revendication contingente C,

- Il faut un investissement initial $\bar{\xi} \cdot \bar{\pi}$ au temps $t = 0$.
- Ce montant, que l'acheteur doit payer à l'émetteur de l'option (le scripteur d'option), est également appelé "prix d'arbitrage" de la revendication contingente C et est noté $\pi(C) = \bar{\xi} \cdot \bar{\pi}$
- L'action d'allouer un portefeuille $\bar{\xi}$ tel que $C = \bar{\xi} \cdot \bar{S}$ est appelée "couverture" ou "réplication" de la revendication contingente.

Pour résumer le point dernier on peut dire que

- Pour atteindre une revendication contingente, il faut un investissement initial.
- Ce montant est également appelé "prix d'arbitrage" de la revendication contingente.
- L'action d'allouer un portefeuille pour répliquer la revendication contingente est appelée "couverture" ou "réplication".

\- Pour une illustration, une personne peut acheter des actifs liés au pétrole pour se couvrir contre les une hausse potentielle du gasoil. Dans ce cas, toute hausse de prix dans le gasoil qui provoquera une valeur supérieure de C sera corrélé à la hausse de la valeur de l'actif, de telle sorte à garder l'égalité $C = \bar{\xi} \cdot \bar{S}$.

\- Si $\bar{\xi} \cdot \bar{S} \geq C$ on parle de "super-hedging"