Calcul Stochastique Appliqué à la Finance - 4ème GF

Chapitre 1 : Actifs, Portefeuilles et arbitrage

Pr. El Mahjour

Plan

Introduction

- Une personne veut vendre/acheter un actif.

- Les options européennes : la base de gestion de risque financier

- Une personne veut toujours réaliser un gain après l’acquisition d’une option.

- On considère S_t le prix d'une action à l'instant t

- Souci de l'acheteur à l'instant T : S_T monte/descend ?

- Il peut se protéger par un contrat à l'instant d'achat t

- Contrat : droit de vendre l'actif à un prix fixe K à l'instant T (sans obligation)

- Ce contrat s'appelle une "option de vente **put**".

- Date d'échéance : T et prix d'exercice : K

Définition (european put)

Une option de vente "put" est un contrat qui donne à son détenteur le droit (mais pas l'obligation) de vendre une quantité d'actifs avec un prix fixe prédéfini K lors d'une date d'échéance prévue T.

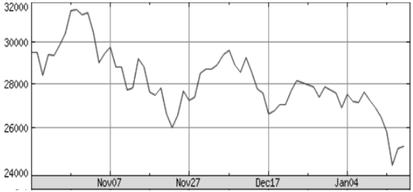

Figure: L'indice de Hang Seng - posséder une option peut être bénéfique

- On suppose l'absence des coûts de transactions et des autres frais.

- Si S_T perd sa valeur (au-dessous de K) alors le détenteur gagnera $K - S_T$.

- Sinon, ($K \leq S_T$) : il n'exercera pas l'option. (vendre au même prix S_T)

- On peut résumer le profit/récompense réalisé comme suit

$$\varphi(S_T) = (K - S_T)^+ = \begin{cases} K - S_T, & si \quad S_T \leq K \\ 0, & si \quad S_T \geq K. \end{cases}$$

- Le graphe suivant montre deux scénarios possibles (S_T terminant au-dessus ou au-dessous de K.)

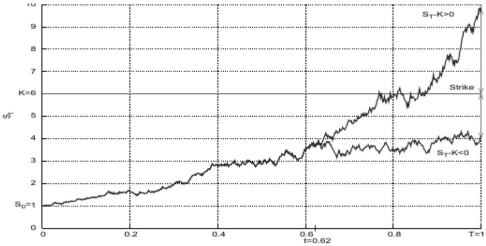

FIGURE 0.2: Sample price processes simulated by a geometric Brownian motion.

Figure: simulation d'une trajectoire possible d'un processus stochastique lié au prix d'un actif en bourse.

- D'autre part, si le "TRADER" vise à vendre un actif.

- Il visera que les prix baissent plus tôt que monter.

- Il peut alors acheter une option "call".

Définition (European call)

C'est un contrat qui donne le droit à son détenteur le droit mais pas l'obligation d'acheter une quantité d'actifs à un prix prédéfini K et une date d'échéance T.

Définitions et formalisme

- On considère un modèle simplifié ou il y a deux instants $t = 0$ et t = 1.

- Actifs numérotés de 1 à d sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

1. Vecteur du prix des actifs

$$\bar{\pi} = (\pi^{(0)}, \pi^{(1)}, \ldots, \pi^{(d)})$$

2. Vecteur de la valeur des actifs

$$\bar{S} = (S^{(0)}, S^{(1)}, \ldots, S^{(d)})$$

3. On considère aussi que l'actif n° 0 est "sans-risque" (compte d'épargne avec un taux d'intérêt) $S^{(0)} = (1 + r)\pi^{(0)}$.

Répartition du portefeuille, vente à découvert, arbitrage et mesures neutres au risque

- Un portfeuille basés sur les actifs $0, 1, \ldots, d$ est un vecteur $\bar{\xi}$

- $\xi^{(i)}$: quantité de l'actif n° i

- $(t = 0)$ le prix d'un telle portefeuille est

$$\bar{\xi} \cdot \bar{\pi} = \sum_{i=0}^{d} \xi^{(i)} \pi^{(i)}$$

- $(t = 1)$ la valeur du portefeuille a évolué à

$$\bar{\xi} \cdot \bar{S} = \sum_{i=0}^{d} \xi^{(i)} S^{(i)}$$

- Si $\xi^{(0)} > 0$ l'investisseur dépose $\xi^{(0)} \pi^{(0)} > 0$ sur son compte d'épargne avec un taux r.

- Si $\xi^{(0)} < 0$ il emprunte $-\xi^{(0)} \pi^{(0)} > 0$ avec le même taux.

- Par le même principe, si $\xi^{(i)} > 0$ l'investisseur va acheter la quantité $\xi^{(i)}$ de l'actif i sinon il l'empruntera.

- Les profits sont réalisés par un prix d'achat d'abord bas et un prix de vente supérieur après

- Les vendeurs à découverte (short-sellers) appliquent la même règle mais inversement. La procédure est

1. emprunter l'actif i
2. à $t = 0$ vendre i pour un prix $\pi^(i)$ et investir la quantité $\pi^{(i)}$ avec un taux $r > 0$
3. à $t = 1$ Acheter i qui est de valeur $S^{(i)}$ en espérant $S^{(i)} < (1 + r)\pi^{(i)}$.
4. Rendre l'actif à son détenteur avec un frais $p > 0$ (négliger dans les calculs suivants)

Arbitrage

- On peut résumer l'arbitrage comme la possibilité de réaliser un gain positive en commençant d'un capital de 0 dirhams ou avec une dette.

- L'arbitrage est un moyen pour vaincre le marché (to beat the market) !

- Naturellement, le marché financier doit être protégé de ce genre de pratique pour éviter toute pratique non fair-play.

Procédure Short-Selling

- **Étape 1 :** Emprunter la somme $-\xi^{(0)}\pi^{(0)} > 0$ de l'actif -sans risque- n° 0
- **Étape 2 :** Utiliser $-\xi^{(0)}\pi^{(0)} > 0$ pour acheter l'actif n° i $\pi^{(i)}$ à l'instant $t = 0$ avec une quantité $\xi^{(i)} = -\xi^{(0)}\pi^{(0)}/\pi^{(i)}$
- **Étape 3 :** Quand $t = 1$, vendre l'actif risqué n° i au prix $S^{(i)}$, en espérant $S^{(i)} > \pi^{(i)}$
- **Étape 4 :** Rembourser la quantité $-(1+r)\xi^{(0)}\pi^{(0)} > 0$ avec un taux d'intérêt $r > 0$

Au final, on réalise un profit de

$$S^{(i)} - (1+r)\pi^{(i)} > 0.$$

Ce qui est possible si $S^{(i)} > \pi^{(i)}$ et r est suffisamment petit.

Formulation mathématique de l'arbitrage

Définition

Un portefeuille $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1}$ constitue une opportunité d'arbitrage is les trois conditions sont satisfaites

i. $\bar{\xi} \cdot \bar{\pi} \leq 0$, [commencer de 0 ou avec une dette]
ii. $\bar{\xi} \cdot \bar{S} \geq 0$, [clôturer avec une somme positive]
iii. $\mathbb{P}\left(\{\bar{\xi} \cdot \bar{S} > 0\}\right) > 0$. [la probabilité d'un gain positif est non nulle]

En réalité, des situations d’arbitrage pourrait se produire, voici quelques exemples

- Des actifs avec des revenus différents (finance)
- Des serveurs d’Internet avec différentes vitesses (calculs en ligne, networking)
- Des routes avec des voies de vitesses différentes [highway lanes] (conduite de véchicules)

- Dans la suite nous supposerons l’absence des opportunités d’arbitrage

- On se basera sur cette hypothèse pour la "tarification des instruments financiers"

- (voir l’exercice intitulé : exemple de tarification sans arbitrage)