Calcul Stochastique Appliqué à la Finance - 4ème GF

Chapitre 0 : Rappels en Probabilités

Pr. El Mahjour

Points Principaux

Espaces Probabilisés et événements

- A, B deux ensembles.
- $A \subset B \longrightarrow A$ est inclus dans B.
- $\omega \in A \longrightarrow \omega$ appartient (est un élément de) A
- L'ensemble fini formé de n éléments $\omega_1, \ldots, \omega_n$ est noté $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$.

Définition

L'univers ou l'espace Ω est un ensemble abstrait qui contient tous les résultats possibles d'une expérience.

- A, B deux ensembles.
- $A \subset B \longrightarrow A$ est inclus dans B.
- $\omega \in A \longrightarrow \omega$ appartient (est un élément de) A
- L'ensemble fini formé de n éléments $\omega_1, \ldots, \omega_n$ est noté $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$.

Définition

L'univers ou l'espace Ω est un ensemble abstrait qui contient tous les résultats possibles d'une expérience.

Exemples

1. Lancer d'une pièce de monnaie :
2. Choisir une carte parmi 52 :
3. Nombres d'accident de voiture par jour :

- A, B deux ensembles.
- $A \subset B \longrightarrow A$ est inclus dans B.
- $\omega \in A \longrightarrow \omega$ appartient (est un élément de) A
- L'ensemble fini formé de n éléments $\omega_1, \ldots, \omega_n$ est noté $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$.

Définition

L'univers ou l'espace Ω est un ensemble abstrait qui contient tous les résultats possibles d'une expérience.

Exemples

1. Lancer d'une pièce de monnaie : $\Omega = \{P, F\}$.
2. Choisir une carte parmi 52 :
3. Nombres d'accident de voiture par jour :

- A, B deux ensembles.
- $A \subset B \longrightarrow A$ est inclus dans B.
- $\omega \in A \longrightarrow \omega$ appartient (est un élément de) A
- L'ensemble fini formé de n éléments $\omega_1, \ldots, \omega_n$ est noté $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$.

Définition

L'univers ou l'espace Ω est un ensemble abstrait qui contient tous les résultats possibles d'une expérience.

Exemples

1. Lancer d'une pièce de monnaie : $\Omega = \{P, F\}$.
2. Choisir une carte parmi 52 : $\Omega = \{1, 2, \ldots, 52\}$.
3. Nombres d'accident de voiture par jour :

- A, B deux ensembles.
- $A \subset B \longrightarrow A$ est inclus dans B.
- $\omega \in A \longrightarrow \omega$ appartient (est un élément de) A
- L'ensemble fini formé de n éléments $\omega_1, \ldots, \omega_n$ est noté $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$.

Définition

L'univers ou l'espace Ω est un ensemble abstrait qui contient tous les résultats possibles d'une expérience.

Exemples

1. Lancer d'une pièce de monnaie : $\Omega = \{P, F\}$.
2. Choisir une carte parmi 52 : $\Omega = \{1, 2, \ldots, 52\}$.
3. Nombres d'accident de voiture par jour : $\Omega = \mathbb{N}$.

L'espace Ω peut être aussi $\mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}$:

Exemples

1. Le prix du cours d'une action en bourse :
2. Le temps, la température ou la richesse :
3. Le choix aléatoire d'une trajectoire continue de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$:

L'espace Ω peut être aussi $\mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}$:

Exemples

1. Le prix du cours d'une action en bourse : $\Omega = \mathbb{R}^+$
2. Le temps, la température ou la richesse :
3. Le choix aléatoire d'une trajectoire continue de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$:

L'espace Ω peut être aussi $\mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}$:

Exemples

1. Le prix du cours d'une action en bourse : $\Omega = \mathbb{R}^+$
2. Le temps, la température ou la richesse : $\Omega = \mathbb{R}$.
3. Le choix aléatoire d'une trajectoire continue de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$:

L'espace Ω peut être aussi $\mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}$:

Exemples

1. Le prix du cours d'une action en bourse : $\Omega = \mathbb{R}^+$
2. Le temps, la température ou la richesse : $\Omega = \mathbb{R}$.
3. Le choix aléatoire d'une trajectoire continue de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$: $\Omega = \mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$.

L'espace Ω peut être aussi $\mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}$:

Exemples

1. Le prix du cours d'une action en bourse : $\Omega = \mathbb{R}^+$
2. Le temps, la température ou la richesse : $\Omega = \mathbb{R}$.
3. Le choix aléatoire d'une trajectoire continue de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$: $\Omega = \mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$.

Dans le dernier cas, $\omega \in \Omega$ est une fonction qui va de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$. Un exemple typique est le graphe $t \mapsto \omega(t)$ du cours d'une option au fil du temps.

Espaces produits

- L'univers de probabilité peut être construit à partir de produit d'ensembles.
- Espace produit $\rightarrow$ expériences aléatoires répétées.

Exemples

1. Lancer de deux dés : $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\} \times \{1, 2, \ldots, 6\}$.
2. Un nombre fini n d'échantillons de valeurs réelles :
   $\Omega = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \mathbb{R}}_{n \text{ fois}} = \mathbb{R}^n$

Dans le cas dernier un élément ω de l'espace $\mathbb{R}^n$ est un vecteur à n composantes $\omega = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
- Les situations de la vie réelle en pratique nécessitent un Ω plus complexe.
- Pile ou Face : $\Omega = \{P, F\}$ mais les actions d'une bourse $\Omega = \mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$.
- Généralement, on ne spécifie pas Ω explicitement.

Événements

Définition

Un événement est une collection de résultats. C'est un sous-ensemble de Ω. Les collections d'événements $\mathcal{G}$ sont nommées des σ-algèbres (tribus).

En bref, on demande que les événements de $\mathcal{G}$ soient stables par union et par le complémentaire.
On notera l'ensemble de tous les événements sur Ω par $\mathcal{F}$. Les ensembles $\emptyset$ et Ω sont considérés comme des événements.

Remarque

On fera la distinction entre le résultat ω et l'événement $\{\omega\}$.

Dans le contexte des processus stochastique, deux tribus $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ veut dire que les informations contenues dans $\mathcal{F}$ sont plus riches que les informations contenues dans $\mathcal{F}$.

Exemples

1. $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$. L'événement $A = \{2, 4, 6\}$ correspond au "résultat du lancer est pair".
2. $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$. On prend $\mathcal{F}_1 = \{\Omega, \emptyset, \{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}\}$. La collection $\mathcal{F}_1$ est bien une tribu.

Cherchons un exemple d'une tribu $\mathcal{F}_2$ plus fine (plus riche en informations que $\mathcal{F}_1$).