Définition 1 *Le mouvement brownien standard* $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *est un processus stochastique qui vérifie*

(i) $B_0 = 0$ *p.s*

(ii) Les trajectoires $t \mapsto B_t$ *sont continue avec une probabilité 1.*

(iii) Pour toute suite finie de temps $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ *les incréments* $B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ *sont indépendants*

(iv) Pour tout $0 \leq s < t$, $B_t - B_s$ *admet une distribution gaussienne* $\mathcal{N}(0, t-s)$ *de moyenne 0 et de variance* $t-s$ *c-à-d*

$$\mathbb{E}[B_t - B_s] = 0 \quad et \quad \mathbf{var}[B_t - B_s] = t - s.$$

Proposition 1 *Si* f *est une fonction* $\mathbf{L}^2$ *alors l'intégrale stochastique* $\int_0^\infty f(t)dB_t$ *à une distribution gaussienne avec*

$$\int_0^\infty f(t)dB_t \sim \mathcal{N}\left(0, \int_0^\infty |f(t)|^2 dt\right)$$

Exercice 1 – ***Des Mouvements Browniens***

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ le mouvement brownien standard.

1. Soit $c > 0$ une constante réelle. Parmi les processus suivants déterminez lesquels sont aussi des mouvements browniens en justifiant.
   (a) $(B_{c+t} - B_c)_{t\geq 0}$
   (b) $(cB_{\frac{t}{c^2}})_{t\geq 0}$
   (c) $(B_{ct^2})_{t\geq 0}$
2. Calcul l'intégrale stochastique $\int_0^T 2dB_t$ en spécifiant sa loi de probabilité, sa moyenne et sa variance.
3. Même question pour $\int_0^T \sin(t)dB_t$.
4. Calculer $\mathbb{E}[B_tB_s]$ en fonction de $s, t \geq 0$.
5. Soit $T > 0$. Montrer que si f est une fonction dérivable telle que $f(0) = f(T) = 0$ alors
$$\int_0^T f(t)dB_t = -\int_0^T f'(t)B_t dt.$$

Indication :

1. Vérifier si chacun d'entre eux respecte les 4 propriétés d'un M.B.
3. Utiliser la formule $\sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$ pour montrer que $x \to \sin(x)$ est $\mathbf{L}^2([0, 2\pi])$.
4. Commencer par $\mathbb{E}[B_tB_s + B_s^2 - B_s^2]$ et utiliser l'indépendance des incréments. On rappelle que si X, Y sont indépendants : $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.
5. Utiliser la formule d'Itô pour $g(t, B_t) = f(t)B_t$.

Exercice 2 – ***EDO / EDS***

Résoudre l'équation différentielle ordinaire $df(t) = cf(t)dt$ et l'équation différentielle stochastique $dS_t = rS_tdt + \sigma S_tdB_t$, où $r, \sigma \in \mathbb{R}$ sont constantes et $(B_t)_{t\geq 0}$ est le Mouvement Brownien Standard.

Exercice 3 – ***Le pont brownien***

Soit $T > 0$, on notera $(X_t^T)_{t\in[0,Y]}$ le processus qui est solution de l'EDS suivante

$$dX_t^T = \sigma dB_t - \frac{X_t^T}{T-t}dt, \qquad t \in [0, T], \tag{1}$$

avec la condition initiale $X_0^T = 0$ et avec $\sigma > 0$. On appelle ce processus le "pont brownien".

1. Montrer que$X_t^T = \sigma(T-t)\int_0^t \frac{1}{T-s}dB_s$.
2. Trouver que $\mathbb{E}[X_t^T] = 0$ et que $\mathbf{var}[X_t^T] = \sigma^2 t(T-t)/T$ pour tout $t \in [0, T]$.
3. Montrer que $X_T^T = 0$.

Indication :

1. Utiliser Itô pour $g(t, X_t^T) = \frac{X_t^T}{T-t}$.

Proposition 2 *Si* $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *alors*

$$\mathbb{E}[\exp(cX)] = \exp\left(c\mu + \frac{1}{2}c^2\sigma^2\right).$$

Exercice 4 –

1. Résoudre l'EDS :
$$dS_t = \alpha S_tdt + \sigma dB_t \tag{2}$$
en termes de $\alpha, \sigma > 0$ et la condition initiale S_0.
2. Pour quelle valeur de α le prix actualisé $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$ est une martingale ?

Indication :

1. Utiliser Itô pour $f(t, S_t) = S_te^{-\alpha t}$.

Exercice 5 – Le prix de l'action de la société "A" clôture à 117,25 DH le 1er août, avec un prix d'exercice de 100 Dh. L'option expire le 1er novembre. Aucun dividende ne sera versé jusqu'à la date d'expiration et le taux d'intérêt annuel sans risque est de 8,5%. Si l'écart-type de la volatilité des rendements de l'action est de 0,8445, calculez le prix de l'option d'achat en utilisant la formule du modèle de Black-Scholes.

Indication :

1. Utiliser la formule de Black-Scholes

$$C(S, t) = \psi(d+)S - \psi(d-)Ke^{-r(T-t)}$$

où

* $d+ = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\log(S_t/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)\right]$,
* $d- = d + -\sigma\sqrt{T-t}$.