Exercice 1 – ***Modèle discret : Cox-Ross-Rubinstein***
On considère un modèle à temps discret avec $N+1$ instants $t = 0, 1, \dots, N$. On pose π_t le prix de l'actif non risqué qui évolue selon la loi : $\pi_t = \pi_0(1+r)^t$, où $t = 0, \dots, N$. La valeur de l'actif S_t évolue suivant le système suivant :

$$S_t = \begin{cases} (1+b)S_{t-1} \\ (1+a)S_{t-1} \end{cases}$$

avec $-1 < a < r < b$. Le retour sur l'investissement de l'actif S est défini par $R_t := \dfrac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}, \qquad t = 1, \dots, N$. La filtration $\mathcal{F}_t$ est générée par R_t.

1. Donnez les valeurs possibles de R_t.
2. Montrer que $\mathbb{E}^*[R_{t+1}|\mathcal{F}_t] = r$, sous la mesure de probabilité équivalente $\mathbb{P}^*$:
$$\mathbb{P}^*(R_{t+1} = a|\mathcal{F}_t) = \frac{b-r}{b-a}, \qquad \mathbb{P}^*(R_{t+1} = b|\mathcal{F}_t) = \frac{r-a}{b-a}.$$
3. Montrons que sous $\mathbb{P}^*$ le processus (S_t) satisfait :
$$\mathbb{E}^*[S_{t+k}|\mathcal{F}_t] = (1+r)^k S_t, \qquad t = 0, \dots, N-k, k = 0, \dots, N.$$

Exercice 2 – ***Suite***
On reprend la même formulation de l'exercice 1. On considère un contrat à terme sur S_N avec un prix d'exercice K et un retour $C = S_N - K$.

1. Trouver une allocation de portefeuille (η_N, ξ_N) de prix $V_N = \eta_N \pi_N + \xi_N S_N$ au temps N tel que $V_N = C$.

On supposera que η_t représente la quantité de l'actif non risqué et ξ_t est celle de l'actif risqué.

2. Trouver un portefeuille (η_{N-1}, ξ_{N-1}) pour un prix $V_{N-1} = \eta_{N-1}\pi_{N-1} + \xi_{N-1}S_{N-1}$ quand $t = N-1$ et vérifiant la condition d'auto-financement :
$$V_{N-1} = \eta_N \pi_{N-1} + \xi_N S_{N-1}.$$
3. Construisez dans le même objectif de la question précédente pour les autres instants $t = 1, \dots, N-1$.
4. Calculer $\pi_t(C)$ la valeur du contrat C à l'instant t.
5. Montrer que le prix d'arbitrage $\pi_t(C)$ satisfait la relation
$$\pi_t(C) = \frac{1}{(1+r)^{N-t}} \mathbb{E}^*[C|\mathcal{F}_t], \quad t = 0, 1, \dots, N.$$

Indication :
1. Écrivez $V_N = C$ sous la forme d'un système à 2 équations.

Exercice 3 – On reprend le même cadre de l'exercice 1. On considère cette fois-ci que le prix actualisé de l'actif est

$$X_t = \frac{S_t}{(1+r)^t}, \qquad t = 1, \dots, N.$$

1. Montrez que le modèle admet une mesure neutre au risque unique $\mathbb{P}^*(R_t = a)$ et $\mathbb{P}^*(R_t = b)$ pour tout $1 \le t \le N$.
2. Existe-t-il une opportunité d'arbitrage dans ce modèle ?Expliquez pourquoi.
3. Est-ce que ce modèle de marché est complet ?
4. Considérons un contrat de créance conditionnelle (revendication contingente) avec un rendement $C = (S_N)^2$. Calculer la valeur actualisé $\tilde{V}_t$ d'un portefeuille autofinancé *couvrant* la créance conditionnelle C, t.q
$$\tilde{V}_N = \tilde{C} = \frac{(S_N)^2}{(1+r)^N}.$$
5. Calculer la stratégie du portefeuille
$$(\bar{\xi}_t)_{t=1,\dots,N} = (\xi_t^0, \xi_t^1)_{t=1,\dots,N}$$
associé à $\tilde{V}_t = \bar{\xi}_t \cdot \bar{S}_t = \xi_t^0 X_t^0 + \xi_t^1 X_t^1, \qquad t = 1, \dots, N.$
6. Vérifier que la stratégie précédente est autofinancée, c-à-d :
$$\bar{\xi}_{t+1} \cdot \bar{S}_t = \bar{\xi}_t \cdot \bar{S}_t, \qquad t = 1, \dots, N-1.$$