TD n°3 : Calcul Stochastique

Master MMA - 1ère année - 2021/2022
Pr. Hamza El Mahjour

Calcul d'Itô et EDS

Exercice 1

1. Démontrez qu'il existe une solution unique à l'équation :

$$dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma dB_t$$

2. Déterminer de façon explicite cette solution.

Correction ▼ [01]

Exercice 2

Soit X et Y deux processus vérifiant

$$\begin{cases} dX_t &= \alpha X_t dt + Y_t dB_t; \qquad X(0) = x_0, \\ dY_t &= \alpha Y_t dt - X_t dB_t; \qquad Y(0) = y_0. \end{cases}$$

où $\alpha > 0$ et B_t est un mouvement brownien standard.

1. Montrer que $R = X^2 + Y^2$ est déterministe.
2. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $cov(X,Y)$.
3. Pour quelle valeur de α la variable R est déterministe et constante.

Correction ▼ [02]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. On doit vérifier que

   (i) $|v(x,t)-v(y,t)|+|u(x,t)-u(y,t)| \leqslant K|x-y|$,

   (ii) $|v(x,t)|^2+|u(y,t)|^2 \leqslant K(1+x^2)$,

   (iii) $\mathbb{E}[X_0^2] < \infty$.

   $(i) \implies |a(b-x)-a(b-y)|+|\sigma-\sigma| = |a||x--y| \leqslant |a|\cdot|x-y|$.

   $(ii) \implies$, $|x| \leqslant 1 \implies |x| \leqslant 1+x^2$ et $|x|>1 \implies |x| \leqslant x^2 \leqslant 1+x^2$. Donc

$$\begin{aligned}
|v(x,t)|^2+|u(x,t)|^2 &= |a(b-x)|^2+|\sigma|^2 \\
&= a^2(b-x)^2+\sigma^2 \\
&= a^2(b^2-2bx+x^2)+\sigma^2 \\
&\leqslant a^2(b^2+2|b|(1+x^2)+x^2)+\sigma^2 \\
&\leqslant a^2(b^2+2|b|)+\sigma^2+(2|b|+1)x^2 \\
&\leqslant \max(a^2(b^2+2|b|)+\sigma^2, 2|b|+4)(1+x^2).
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

1. En utilisant la formule d'Itô on trouve $dR=(2\alpha+1)Rdt$; $\quad R(0)=x_0^2+y_0^2$. Alors, $R(t)=(x_0^2+y_0^2)\exp((2\alpha+1)t)$.
2. $\mathbb{E}[X(t)] = x_0e^{\alpha t}$ et $\mathbb{E}[Y] = y_0e^{\alpha t}$.
3. Pour la covariance, posons, $Z=XY$. Alors $\mathbb{E}[Z] = x_0y_0+\int_0^t(2\alpha-1)\mathbb{E}[Z(s)]ds$. On peut dire que $m(t)=\mathbb{E}[Z(t)]$ vérifie $m(t)=x_0y_0e^{(2\alpha-1)t}$. Alors

$$cov(X,Y) = x_0y_0e^{2\alpha t}(e)$$
