TD n°2 : Calcul Stochastique

Master MMA - 1ère année - 2021/2022

Pr. Hamza El Mahjour

Mouvement brownien et Intégrale d'Itô

Exercice 1

Soit Z une v.a.r de loi normale standard. On pose pour tout $t \geqslant 0$, $X_t = \sqrt{t}Z$. Le processus stochastique $(X_t)_{t \geqslant 0}$ est à trajectoires continues et $X_t \sim \mathcal{N}(0,t)$. Est-ce que X est un mouvement brownien ? (justifier)

[01]

Exercice 2

Soient (B_t) et $(\tilde{B}_t)$ deux M.B indépendants. Pour $t \geqslant 0$, on pose $Y_t = \rho B_t + \sqrt{1-\rho^2}\tilde{B}_t$ où $\rho \in [0,1]$ est une constante. Le processus (Y_t) est à trajectoires continues et pour tout $t \geqslant 0$, $X_t \sim \mathcal{N}(0,t)$. Est-ce que X est un mouvement Brownien ? [02]

Exercice 3

Soit W_t un processus stochastique vérifiant les propriétés $(i.1),(i.2)$ et $(i.3)$ [Voir notes de cours , Chap 4 : Intégrale d'Itô]. Prouver que W_t ne peut pas avoir des trajectoires continues

Indication ▼ [03]

Exercice 4

Soit $X_t = \exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right)$ est une martingale où (B_t) est un M.B sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, \mathbb{P})$. Montrer que (X_t) est une martingale. [04]

Exercice 5

Utiliser la formule d'Itô pour écrire chacun des processus sous sa forme standard

$$dX_t = u(t,\omega)dt + v(t,\omega)dB_t$$

1. $X_t = B_t^2$, (B_t est 1-D)
2. $X_t = 2 + t + e^{B_t}$ (B_t est 1-D)
3. $X_t = B_1^2(t) + B_2^2(t)$ ((B_1, B_2) est 2-D)
4. $X_t = (t_0 + t, B_t)$ (B_t est 1-D)

[05]

Exercice 6

Soit $x > 0$ une constante et posons

$$X_t = (x^{1/3} + \frac{1}{3}B_t)^3; \qquad t \geqslant 0.$$

Montrer que

$$dX_t = \frac{1}{3}X^{\frac{1}{3}} + X_t^{\frac{2}{3}}dB_t; \qquad X_0 = x.$$

[06]

Indication pour l'exercice 3 ▲

Considérez $\mathbb{E}\left[\left(W_t^{(N)} - W_s^{(N)}\right)^2\right]$ où

$$W_t^{(N)} = (-N) \vee (N \wedge W_t), \quad N = 1, 2, \ldots$$