TD n°1 : Calcul Stochastique

Master MMA - 1ère année - 2021/2022

Pr. Hamza El Mahjour

Espérances conditionnelles et Martingales

Exercice 1

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles (v.a.r) intégrables sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ et $\mathscr{G}, \mathscr{H} \subset \mathscr{F}$ telles que $\sigma(\mathscr{G}, \mathscr{H}) = \mathscr{F}$. Trouver des contre-exemples aux affirmations suivantes

1. $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X] \implies X$ et Y sont indépendantes.
2. $\mathbb{E}[X|\mathscr{G}] = 0$ et $\mathbb{E}[X|\mathscr{H}] = 0 \implies X = 0$.
3. X et Y sont indépendantes $\implies \mathbb{E}[X|\mathscr{G}]$ et $\mathbb{E}[Y|\mathscr{G}]$ sont indépendantes.

Correction ▼ [01]

Exercice 2

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a positives sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ et $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-tribus de $\mathscr{F}$. On suppose que $\mathbb{E}[X_n|\mathscr{F}_n]$ converge en probabilité vers 0.

1. Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$.
2. La réciproque est-il vraie ? (Justifier)

Correction ▼ [02]

Exercice 3

[1] On dit que deux v.a X et Y à valeurs dans un espace $(E, \mathscr{E})$ sont indépendantes conditionnellement à $\mathscr{G}$ si pour toutes fonctions f et g de E dans $\mathbb{R}^+$ mesurables

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)|\mathscr{G}] = \mathbb{E}[f(X)|\mathscr{G}]\mathbb{E}[g(Y)|\mathscr{G}].$$

Que signifie ceci si $\mathscr{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ et ? si $\mathscr{G} = \mathscr{E}$?

Correction ▼ [03]

Exercice 4

Soit S_n une marche aléatoire (M.A) simple symétrique sur $\mathbb{Z}$ et $\mathscr{F}_n = \sigma(S_1, \ldots, S_n)$.

- Montrer que les processus suivants sont des martingales.
  1. $(S_n)_{n\geqslant 0}$.
  2. $(S_n^2 - n)_{n\geqslant 0}$.
  3. $(S_n^3 - 3nS_n)_{n\geqslant 0}$.
- Soit $Q(X,Y)$ un polynôme à deux variables et montrer que $(Q(S_n, n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale pour (F_n) si pour tout $s, n \in \mathbb{Z}$,

$$Q(s+1, n+1) - 2Q(s,n) + Q(s-1, n+1) = 0.$$

1. j'ai supprimé la deuxième question de cette exercice 3 ...

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Trouver $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $e^{(\alpha S_n - n\beta)}$ soit une martingale pour la filtration $(\mathscr{F}_n)$.

Correction ▼ [04]

Exercice 5

Soit $\mathscr{T}$ un temps d'arrêt pour une filtration (F_n). On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $n \geqslant 0$, on a $\mathbb{P}(\mathscr{T} \leqslant n + n_0 | \mathscr{F}_n) > \varepsilon$. Montrez que $\mathscr{T}$ est fini p.s.

Correction ▼ [05]

Exercice 6

Soit (S_n) une M.A simple symétrique sur $\mathbb{Z}$. Soient $a, b \geqslant 0$. Considérons

$$\mathscr{T} = \inf\{n \in \mathbb{N}, S_n = -a \text{ ou } \; S_n = n\}$$

On rappelle que $\mathscr{T} < +\infty$ p.s.

1. En utilisant le fait que la M.A est une martingale et le théorème d'arrêt

$$\mathbb{P}(\{S_{\mathscr{T}} = b\}) = \frac{a}{a+b}.$$

2. En utilisant la martingale $(S_n^2 - n)$ et le théorème d'arrêt. Montrer que $\mathbb{E}[\mathscr{T}] = ab$.

Correction ▼ [06]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Considérer X de loi uniforme sur $\{-2,-1,1,2\}$ et poser $Y=|X|$. On voit clairement que Y et X sont dépendants et par un calcul simple on trouve $\mathbb{E}[X|Y]=\mathbb{E}[X]$
2. Soit X et Y deux variables i.i.d avec $\mathbb{P}(\{X=1\})=\mathbb{P}(\{X=-1\})=1/2$. On pose $\mathscr{F}=\sigma(X,Y)$. Soit $Z=X\cdot Y$. On a bien $\mathbb{E}[Z|X]=\mathbb{E}[Z|Y]=0$ et $Z\neq 0$.
3. Il suffit de pendre X et Y deux variables suivant une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ et $\mathscr{G}=\sigma(X+Y)$.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Soit $\varepsilon>0$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $A_n=\left\{\omega\in\Omega,\mathbb{E}[\{X|\mathscr{F}_n>\varepsilon^2/2\}]\right\}$. Par hypothèse, on a $\lim\mathbb{P}(A_n)=0$, donc, pour n assez grand, $\mathbb{P}(A_n)<\varepsilon/2$. De plus $\mathbb{E}\left[X_n\mathbb{1}_{A_n^C}\right]=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_n|\mathscr{F}_n\right]\mathbb{1}_{A_n^C}\right]\leqslant\varepsilon^2/2$. En utilisant l'inégalité de Markov, on a
$$\mathbb{P}(\{X_n\geqslant\varepsilon \text{ et } A_n^C\})\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}[X_n\mathbb{1}_{A_n^C}]\leqslant(1/\varepsilon)(\varepsilon^2/2)=\varepsilon/2.$$
ce qui nous permet d'écrire
$$\mathbb{P}(\{X_n\geqslant\varepsilon\})\leqslant\mathbb{P}(A_n)+\mathbb{P}(\{X_n\geqslant\varepsilon \text{ et } A_n^C\})\leqslant\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$
Donc X_n converge en probabilité vers 0.
2. Prenez par exemple $\mathscr{F}_n=\{\emptyset,\Omega\}$ avec $\mathbb{P}(X_n=0)=1-1/n$ et $\mathbb{P}(\{X_n=n^2\})=1/n$.

Correction de l'exercice 3 ▲

> On rappelle que deux variables aléatoires X_1,X_2 réelles $(\in\mathbb{R}^{d^{\mathbb{R}^n}})$ sont indépendantes ssi , pour toutes fonctions f et g boréliennes on a
> $$\mathbb{E}[f(X_1)g(X_2)]=\mathbb{E}[f(X_1)]\mathbb{E}[g(X_2)].$$

Si $\mathscr{G}=\{\emptyset,\Omega\}$ l'égalité s'écrit, on a
$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)|\{\emptyset,\Omega\}]=\mathbb{E}[f(X)g(Y)]=\mathbb{E}[f(X)|\{\emptyset,\Omega\}]\times\mathbb{E}[g(Y)|\{\emptyset,\Omega\}]=\mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(Y)].$$
pour toutes les fonctions f et g mesurables dans $\mathbb{R}^+$, c'est à dire que X_1 et X_2 sont indépendants.
Dans le deuxième cas où $\mathscr{G}=\mathscr{E}$ on aurait que $f(X),g(Y)\in\mathscr{E}$ et $f(X),g(Y)\in\mathscr{E}$ ce qui rend l'égalité triviale. Mais on ne peut rien dire sur l'indépendance de X et Y.

Correction de l'exercice 4 ▲

Notons $X_n=S_n-S_{n-1}$ le pas de la M.A.

1. On a
$$\mathbb{E}[S_{n+1}|\mathscr{F}_n]=\mathbb{E}[S_n+X_{n+1}|\mathscr{F}_n]=S_n+\mathbb{E}[X_{n+1}]=S_n.$$
2. On a :
$$\mathbb{E}[S_{n+1}^2|\mathscr{F}_n]=\mathbb{E}[S_n^2]+2S_n\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathscr{F}_n]+\mathbb{E}[X_{n+1}^2|\mathscr{F}_n].$$
Or X_{n+1} et X_{n+1} sont indépendants de $\mathscr{F}_n$. Donc
$$\mathbb{E}[S_{n+1}^2|\mathscr{F}_n]=\mathbb{E}[S_n^2]+2S_n\mathbb{E}[X_{n+1}]+\mathbb{E}[X_{n+1}^2].$$
De plus $\mathbb{E}[X_{n+1}]=0$ et $\mathbb{E}[X_{n+1}^2]=\sum_k k\mathbb{P}(X_{n+1}=k)$ mais il y a une valeur possible de k c'est $k=1$, le reste c'est de ensembles vides. Donc $\mathbb{E}[X_{n+1}^2]=\mathbb{P}(\{X_{n+1}=1\}\cup\{X_{n+1}=-1\})=\mathbb{P}(\Omega)=1$. Donc $\mathbb{E}[S_{n+1}^2|\mathscr{F}_n]=S_n^2+1$. Alors $\mathbb{E}[S_{n+1}^2-(n+1)|\mathscr{F}_n]=\mathbb{E}[S_{n+1}^2]-\mathbb{E}[(n+1)]=S_n^2+1-n-1=S_n^2-n$. Donc c'est bien une martingale.

3. calcul similaire au précédent.
4. On calcule
$$\mathbb{E}[P(S_{n+1},n+1)|\mathscr{F}_n] = \frac{1}{2}\left(P(S_n+1,n+1)+P(S_n-1,n+1)\right).$$
Il suffit de prendre $P(X+1,n+1)-2P(X,n)+P(X-1,n+1)=0$ pour obtenir une martingale.
5. $\beta = \ln(\mathrm{ch}(\alpha))$.

Correction de l'exercice 5 ▲

On montre par réccurence sur k que $\mathbb{P}(\{T \geqslant kn_0\}) \leqslant (1-\varepsilon)^k$. C'est vrai pour $k=0$ ... Après, utilisez

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{T \geqslant (k+1)n_0\}) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{T\geqslant kn_0\}}\mathbb{1}_{\{T\geqslant(k+1)n_0\}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{T\geqslant kn_0\}}\mathbb{P}(\{T \geqslant k(n_0+1)\}|\mathscr{F}_{kn_0})\right] \\
&\leqslant \dots
\end{aligned}$$

On conclut par l'hypothèse de récurrence. On en déduit aisément que $\mathbb{E}[T] < \infty$ et T est p.s fini.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Soit $t>0$, alors $\inf(\mathscr{T},\, t)$ est un temps d'arrêt aussi qui est borné en plus. On peut alors appliquer le théorème d'arrêt :
$$\mathbb{E}\left[S_{\inf(\mathscr{S},\, t)}\right] = \mathbb{E}[S_0] = 0.$$
Et puisque $\mathscr{T} < \infty$ p.s donc $S_{\inf(\mathscr{T},\, t)}$ converge vers $S_{\mathscr{T}}$ presque sûrement, et on a $-a \leqslant S_{\inf(\mathscr{S},\, t)} \leqslant b$ pour tout t. Par convergence dominée, on peut donc écrire
$$\mathbb{E}\left[S_{\mathscr{T}}\right] = \lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[S_{\inf(\mathscr{S},\, t)}\right] = 0.$$
D'autre part, en notant $p = \mathbb{P}(\{S_{\mathscr{T}} = b\})$, on a
$$0 = \mathbb{E}[S_{\mathscr{T}}] = (1-p)(-a)+pb.$$
d'où $p = a/(a+b)$
2. On applique le théorème d'arrêt sur $S_n^2 - n$ et au temps d'arrêt $\mathscr{T}\wedge t$. On obtient
$$\mathbb{E}\left[\mathscr{T}\wedge t\right] = \mathbb{E}\left[S^2_{\mathscr{T}\wedge t}\right]$$
On va utiliser la même procédure que la question 1 et en exploitant le résultat aussi de la première question, on trouvera enfin que
$$\mathbb{E}\left[\mathscr{T}\right] = \mathbb{E}\left[S^2_{\mathscr{T}}\right] = \frac{b}{a+b}(-a)^2 + \frac{a}{a+b}b^2 = ab.$$
