Espaces Euclidiens et Formes Quadratiques

Séance 9: Diagonalisation des endomorphismes autoadjoints

Hamza El Mahjour
ENSAT

Plan de la séance

Définition

Definition

Soit E un espace Euclidien. Un endomorphisme $f \in \mathrm{End}(E)$ est dit **autoadjoint** si :

$$\forall x, y \in E, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$$

i.e. si $f^* = f$.

Caractérisation matricielle

Soit $\{e_i\}$ une base orthonormée de E.
f est autoadjoint ssi sa matrice $M(f)_{e_i}$ est symétrique :

$$^tM(f)_{e_i} = M(f)_{e_i}$$

Démonstration.

Pour $x = \sum x_i e_i$, $y = \sum y_i e_i$:

$$\langle f(x), y\rangle = {}^t(M(f)X)Y = {}^tX\,{}^tM(f)Y$$

$$\langle x, f(y)\rangle = {}^tXM(f)Y$$

Donc $^tM(f) = M(f)$. □

Théorème de diagonalisation

Theorem

Soit E un espace Euclidien et $f \in \mathrm{End}(E)$ autoadjoint. Alors :

1. *f est diagonalisable*
2. *Les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux*
3. *Il existe une base orthonormée de vecteurs propres*

Démonstration (1) : valeurs propres réelles

Démonstration.

Soit A la matrice de f dans une base orthonormée, et λ une valeur propre.
Soit X un vecteur propre complexe : $AX = \lambda X$.
Alors :

$$\lambda {}^tX\overline{X} = {}^t(AX)\overline{X} = {}^tX{}^tA\overline{X} = {}^tXA\overline{X} = \overline{\lambda}{}^tX\overline{X}$$

Donc $\overline{\lambda} = \lambda$, et λ est réel. □

Démonstration (2) : stabilité des sous-espaces

Démonstration.

Soit λ une valeur propre, x un vecteur propre, et $H = \mathrm{Vect}(x)^{\perp}$.
Montrons que $f(H) \subset H$. Soit $y \in H$:

$$\langle f(y), x\rangle = \langle y, f(x)\rangle = \lambda\langle y, x\rangle = 0$$

Donc $f(y) \in H$.
La restriction $\bar{f} = f_{|H}$ est autoadjoint.
Par récurrence, il existe une base de vecteurs propres de H.
Avec x, on obtient une base de vecteurs propres de E. $\square$

Démonstration (3) : orthogonalité des sous-espaces

Démonstration.

Soient v_1, v_2 vecteurs propres avec valeurs propres $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
Alors :

$$\lambda_1\langle v_1, v_2\rangle = \langle f(v_1), v_2\rangle = \langle v_1, f(v_2)\rangle = \lambda_2\langle v_1, v_2\rangle$$

Donc $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle v_1, v_2\rangle = 0$, et $\langle v_1, v_2\rangle = 0$. □

Corollaire matriciel

Corollary

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

Contre-exemple complexe

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Montrer que A n'est pas diagonalisable.

Critère pour un produit scalaire

Soit f une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel réel E de dimension n.
Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E.
f définit un produit scalaire ssi la matrice $M(f)_{e_i}$ a toutes ses valeurs propres strictement positives.

Démonstration

Démonstration.

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle_{e_i}$ le produit scalaire associé à la base $\{e_i\}$.
Soit g l'endomorphisme de matrice $M(f)_{e_i}$ dans $\{e_i\}$.
Alors :

$$f(x, y) = \langle x, g(y) \rangle_{e_i}$$

g est autoadjoint pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_{e_i}$.
Dans une base orthonormée de vecteurs propres :

$$f(x, x) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$$

Donc f est définie positive ssi tous les $\lambda_i > 0$. □

Exemple

Example

Soit f la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$ de matrice :

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ses valeurs propres sont solutions de :

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$$

Toutes positives, donc f est un produit scalaire.

Méthode pratique

Pour vérifier qu'une forme bilinéaire symétrique est un produit scalaire :

1. Écrire sa matrice dans une base • Calculer les valeurs propres • Vérifier qu'elles sont toutes strictement positives

Alternative : utiliser la méthode de Gauss (voir chapitre 2).

Résumé de la séance

- Définition des endomorphismes autoadjoints • Théorème de diagonalisation • Orthogonalité des sous-espaces propres • Application aux formes bilinéaires symétriques • Critère pour un produit scalaire

Prochaine séance : Formes bilinéaires et formes quadratiques - notions de base