Espaces Euclidiens et Formes Quadratiques

Séance 8: Angles en dimension 3 et produit vectoriel

Hamza El Mahjour
ENSAT

Plan de la séance

1. Angles orientés en dimension 3
2. Produit vectoriel

Angle orienté dans un plan orienté

Situation

Soit E un espace Euclidien orienté de dimension 3.
Soit π un plan de E, muni de l'orientation induite par un vecteur unitaire n normal à π.
Soient $u, v \in \pi \setminus \{0\}$.

Proposition

Il existe un unique angle orienté $\theta = (uv)$ entre u et v dans le plan orienté π.
L'axe de la rotation $\mathcal{R}_\theta$ est la droite dirigée par n.

Calcul du sinus

Exercice

Soit $\{e_1, e_2\}$ une base orthonormée directe de π, et $B = \{e_1, e_2, n\}$ une base orthonormée directe de E.
Montrer que :

$$\sin\theta = \frac{\det(u, v, n)}{\|u\|\|v\|}$$

Démonstration

Démonstration.

Dans la base B, on a :

$$u = (u_1, u_2, 0), \quad v = (v_1, v_2, 0), \quad n = (0, 0, 1)$$

Alors :

$$\det(u, v, n) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 0 \\ u_2 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = u_1 v_2 - u_2 v_1 = \det(u, v)$$

D'autre part :

$$\sin\theta = \frac{\det(u, v)}{\|u\|\|v\|}$$

Définition du produit vectoriel

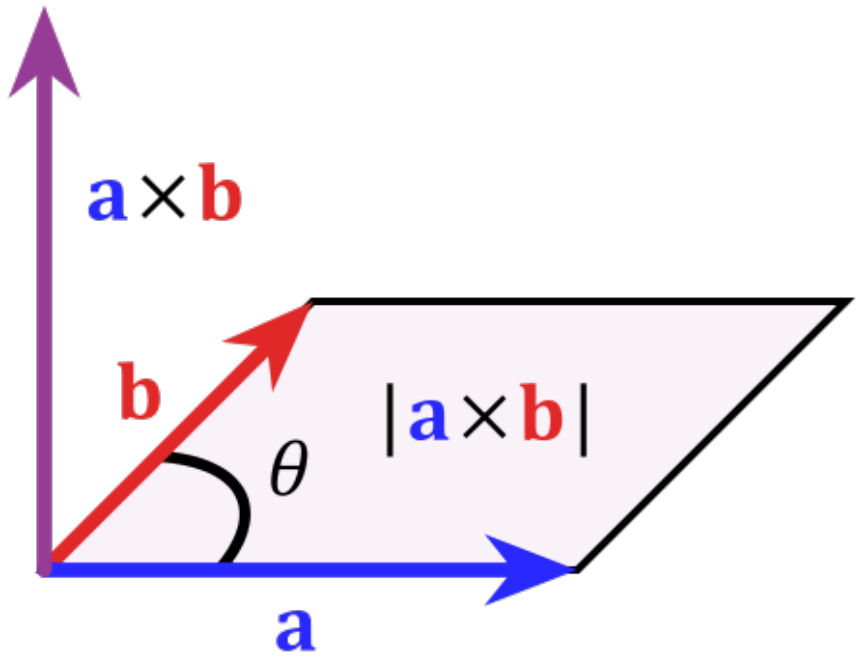
Definition

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace Euclidien orienté de dimension 3. Soient u, v deux vecteurs indépendants. Le **produit vectoriel** $u \wedge v$ est l'unique vecteur tel que :

1. $u \wedge v \perp \mathrm{Vect}(u, v)$
2. $(u, v, u \wedge v)$ est une base directe
3. $\|u \wedge v\| = \mathrm{Aire}(u, v)$ (aire du parallélogramme)

Si u et v sont liés, on pose $u \wedge v = 0$.

Interprétation géométrique



$$\text{Aire}(a, b) = \|a\|\|b\||\sin\theta|$$

Expression du produit vectoriel

Proposition

Soient $u, v \in E$. Soit n un vecteur unitaire perpendiculaire à $\mathrm{Vect}(u, v)$ et θ l'angle orienté défini par n.
Alors :

$$u \wedge v = \|u\|\|v\| \sin\theta \cdot n$$

Démonstration

Démonstration.

Soit $w = \frac{u \wedge v}{\|u \wedge v\|}$. Par définition :

$$u \wedge v = \text{Aire}(u, v) \cdot w = \|u\|\|v\||\sin\theta| \cdot w$$

D'autre part :

$$\sin\theta = \frac{\det(u, v, n)}{\|u\|\|v\|}$$

Si $w = n$, alors $\sin\theta > 0$. Si $w = -n$, alors $\sin\theta < 0$.
Dans les deux cas :
$\|u\|\|v\| \sin\theta \cdot n = \|u\|\|v\||\sin\theta| \cdot w$ □

Coordonnées dans une base orthonormée directe

Exercice

Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base orthonormée directe de E.
Soient $x = \sum x_i e_i$, $y = \sum y_i e_i$.
Montrer que :

$$x \wedge y = (x_2y_3 - x_3y_2)e_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)e_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)e_3$$

Propriétés du produit vectoriel

Exercice

Soient $x, y, z \in E$. Montrer :

1. $\|x \wedge y\|^2 = \|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2$
2. $x \wedge (y \wedge z) = \langle x, z\rangle y - \langle x, y\rangle z$

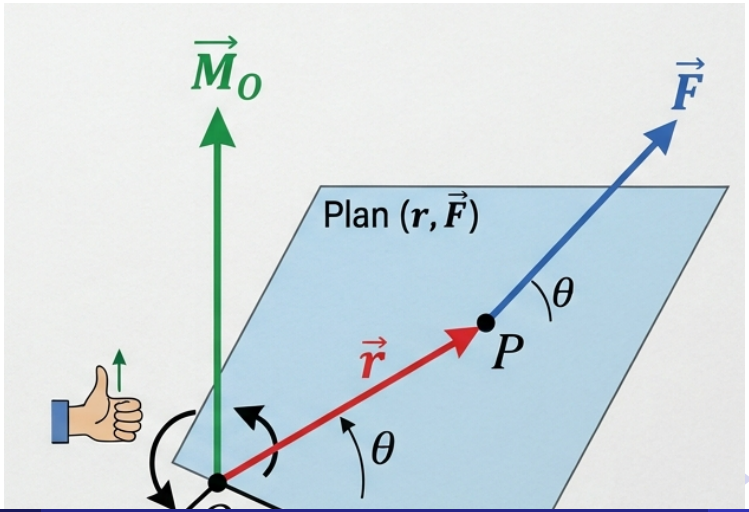
Application : moment d'une force

En mécanique

Le moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un point O est :

$$\vec{M}_O = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

où $\vec{r}$ est le vecteur position du point d'application de $\vec{F}$ par rapport à O.



Double produit vectoriel

Theorem

Pour tous $x, y, z \in E$ *:*

$$x \wedge (y \wedge z) = \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z$$

Démonstration.

On peut vérifier que les deux membres ont les mêmes produits scalaires avec tous les vecteurs de E. □

Identité de Jacobi

Exercice

Montrer que pour tous $x, y, z \in E$:

$$x \wedge (y \wedge z) + y \wedge (z \wedge x) + z \wedge (x \wedge y) = 0$$

Résumé de la séance

- Angles orientés en dimension 3 • Définition et propriétés du produit vectoriel • Expression en coordonnées • Applications en géométrie et mécanique • Identités vectorielles

Prochaine séance : Diagonalisation des endomorphismes autoadjoints