Espaces Euclidiens et Formes Quadratiques

Séance 7: Orientation et angles

Hamza El Mahjour
ENSAT

Plan de la séance

1. Bases orientées
2. Angles non orientés
3. Angles orientés en dimension 2

Orientation d'un espace Euclidien

Definition

Soit E un espace Euclidien de dimension n. Fixons une base orthonormée $\{e_i\}$.
Une base orthonormée $\{e'_i\}$ est dite **directe** si :

$$\det P_{\{e_i\}\to\{e'_i\}} = 1$$

et **indirecte** si le déterminant vaut -1.
E muni de $\{e_i\}$ est appelé espace Euclidien **orienté**.

Exemple : orientation canonique

Example

Sur $\mathbb{R}^n$, on prend la base canonique :

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad e_n = (0, \ldots$$

Une base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est directe si :

$$\det P_{\{e_i\} \to \{v_i\}} = 1$$

Orientation induite sur un hyperplan

Problème

Soit E un espace Euclidien orienté de dimension n et π un hyperplan.
Comment définir une orientation sur les bases orthonormées de π ?

Solution

Soit $w \in \pi^{\perp}$ avec $\|w\| = 1$.
Une base orthonormée $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ de π est directe si la base $\{v_1, \ldots, v_{n-1}, w\}$ est directe pour E.

Angle non orienté

Definition

Soient $x, y \in E \setminus \{0\}$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\|\|y\|} \leq 1$$

Il existe donc un unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que :

$$\cos\theta = \frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\|\|y\|}$$

θ est appelé **angle non orienté** entre x et y.

Exemple

Example

Soient $x = (1, 0)$ et $y = (1, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$.
Alors :

$$\cos\theta = \frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\|\|y\|} = \frac{1}{1 \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Donc $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Rotation en dimension 2

Proposition

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace Euclidien orienté de dimension 2. Toute rotation $f \in SO(E)$ s'écrit :

$$M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

pour un unique $\theta \in [-\pi, \pi]$, appelé ***angle de la rotation****.*

Angle orienté entre deux vecteurs

Proposition

Soient $u, v \in E \setminus \{0\}$. *Posons* $U = \frac{u}{\|u\|}$, $V = \frac{v}{\|v\|}$.
Il existe un unique $\theta \in [-\pi, \pi]$ *tel que :*

$$\mathcal{R}_\theta(U) = V$$

θ *est appelé* ***angle orienté*** *entre* u *et* v, *noté* (uv).

Démonstration

Démonstration.

Soient $U = (U_1, U_2)$, $V = (V_1, V_2)$ dans une base orthonormée directe.
Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$U_1 = \cos\alpha, \quad U_2 = \sin\alpha, \quad V_1 = \cos\beta, \quad V_2 = \sin\beta$$

Alors :

$$\mathcal{R}_\theta(U) = V \iff \theta = \beta - \alpha \mod 2\pi$$



Calcul de l'angle orienté

Formules

$$\cos\theta = \langle U, V\rangle = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}$$

$$\sin\theta = \det(U, V) = \frac{\det(u, v)}{\|u\|\|v\|}$$

Example

Soient $u = (1, 0)$, $v = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ dans $\mathbb{R}^2$.
Alors :

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Propriétés

Exercice

Montrer que :

1. $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, \mathcal{R}_\theta \circ \mathcal{R}_{\theta'} = \mathcal{R}_{\theta+\theta'}$
2. $\forall u, v, w \in E, (uv) + (vw) = (uw) \mod 2\pi$

Invariance par changement de base directe

Remarque

L'angle orienté θ ne change pas si on oriente E par une autre base directe.
C'est pourquoi on travaille dans un espace Euclidien orienté : les angles orientés sont bien définis.

Résumé de la séance

- Notion d'orientation d'un espace Euclidien
- Orientation induite sur un hyperplan
- Angle non orienté entre deux vecteurs
- Angle orienté en dimension 2
- Calcul des angles orientés

Prochaine séance : Angles en dimension 3 et produit vectoriel