Espaces Euclidiens et Formes Quadratiques

Séance 5: Endomorphisme adjoint et groupe orthogonal

Hamza El Mahjour
ENSAT

Plan de la séance

1. Endomorphisme adjoint
2. Groupe orthogonal

Définition

Definition

Soit E un espace Euclidien et $f \in \mathrm{End}(E)$. Il existe un unique endomorphisme $f^* \in \mathrm{End}(E)$ tel que :

$$\forall x, y \in E, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$$

f^* est appelé l'**adjoint** de f.

Expression matricielle

Proposition

Soit $\{e_i\}$ une base orthonormée de E. Si $M(f)_{e_i}$ est la matrice de f, alors :

$$M(f^*)_{e_i} = {}^tM(f)_{e_i}$$

Démonstration.

Pour $x = \sum x_i e_i$, $y = \sum y_i e_i$:

$$\langle f(x), y\rangle = {}^t(M(f)X)Y = {}^tX\,{}^tM(f)Y = \langle x, f^*(y)\rangle$$

avec f^* ayant pour matrice ${}^tM(f)$. □

Propriétés de l'adjoint

Proposition

Pour tous endomorphismes f, g et $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. $f^{**} = f$
2. $(\mathrm{id})^* = \mathrm{id}$
3. $(f+g)^* = f^* + g^*$
4. $(\lambda f)^* = \lambda f^*$
5. $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$
6. $\mathrm{rg} f^* = \mathrm{rg} f$
7. $\det f^* = \det f$

Définition

Definition

Soit E un espace Euclidien. Un endomorphisme $f \in \mathrm{End}(E)$ est une **transformation orthogonale** (ou isométrie) si :

$$\forall x, y \in E, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

On note $O(E)$ l'ensemble des transformations orthogonales.

Propriétés équivalentes

Proposition

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\forall x, y \in E, \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$
2. $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$
3. *Dans une base orthonormée,* ${}^{t}M(f)M(f) = I$

Démonstration ($1 \Leftrightarrow 2$)

Démonstration.

$(1 \Rightarrow 2)$: faire $x = y$.

$(2 \Rightarrow 1)$: utiliser l'identité de polarisation :

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \frac{1}{2}(\|f(x)+f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2)$$

$$= \frac{1}{2}(\|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2)$$

$$= \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \langle x, y\rangle$$



Démonstration ($1 \Leftrightarrow 3$)

Démonstration.

Dans une base orthonormée $\{e_i\}$:

$$\langle f(x), f(y)\rangle = {}^t(M(f)X)M(f)Y = {}^tX\,{}^tM(f)M(f)Y$$

$$\langle x, y\rangle = {}^tXY$$

Donc ${}^tM(f)M(f) = I$. □

Propriétés des transformations orthogonales

Proposition

Soit f une transformation orthogonale.

1. *Les valeurs propres de f sont 1 ou -1*
2. $\det f = \pm 1$
3. *f est bijective*

Démonstration (1 et 2)

Démonstration.

Soit λ une valeur propre et $v \neq 0$ un vecteur propre :

$$\|f(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda|\|v\| = \|v\|$$

Donc $|\lambda| = 1$, soit $\lambda = \pm 1$.
De ${}^tM(f)M(f) = I$, on déduit $(\det f)^2 = 1$, donc $\det f = \pm 1$. □

Transformations orthogonales et bases

Proposition

Soit $f \in \mathrm{End}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *f est une transformation orthogonale*
2. *f transforme toute base orthonormée en une base orthonormée*
3. *Il existe une base orthonormée transformée par f en une base orthonormée*

Groupe orthogonal

Definition

L'ensemble :

$$O(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I\}$$

est un groupe pour la multiplication matricielle, appelé **groupe orthogonal**.

Sous-groupes

- $SO(n,\mathbb{R}) = \{A \in O(n,\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ (rotations)
- Matrices de déterminant -1 (réflexions)

Matrice de changement de base

Proposition

Soient $\{e_i\}$ *et* $\{e'_i\}$ *deux bases orthonormées de* E.
La matrice de passage $P_{\{e_i\}\to\{e'_i\}}$ *est orthogonale :*

$$P \in O(n, \mathbb{R})$$

Exercice

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Montrer que $A \in O(2, \mathbb{R})$ ssi :

$$a^2 + c^2 = 1, \quad b^2 + d^2 = 1, \quad ab + cd = 0$$

Résumé de la séance

- Définition et propriétés de l'endomorphisme adjoint • Caractérisation des transformations orthogonales • Propriétés des matrices orthogonales • Groupe orthogonal et groupe spécial orthogonal

Prochaine séance : Étude des groupes $O(2,\mathbb{R})$ et $O(3,\mathbb{R})$