Espaces Euclidiens et Formes Quadratiques

Séance 4: Sous-espaces orthogonaux et projections

Hamza El Mahjour
ENSAT

Plan de la séance

1. Sous-espaces orthogonaux
2. Projection orthogonale

Définition

Definition

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace Euclidien et B un sous-ensemble de E.
L'**orthogonal** de B est :

$$B^{\perp} = \{x \in E \mid \forall b \in B, \langle x, b \rangle = 0\}$$

Propriété

$B^{\perp}$ est toujours un sous-espace vectoriel de E.

Propriétés des sous-espaces orthogonaux

Proposition

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors :

1. $\dim E = \dim F + \dim F^{\perp}$
2. $E = F \oplus F^{\perp}$
3. $F^{\perp\perp} = F$

Démonstration (1)

Démonstration.

Soit $\{v_1, \ldots, v_p\}$ une base de F, complétée en une base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de E.
Soit M la matrice du produit scalaire dans cette base, avec $a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$.
$x = \sum x_j v_j \in F^\perp$ ssi pour tout $i = 1, \ldots, p$:

$$\langle v_i, x \rangle = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$$

C'est un système de p équations linéaires indépendantes, donc $\dim F^\perp = n - p$. □

Démonstration (2 et 3)

Démonstration.

F et $F^\perp$ sont en somme directe car si $x \in F \cap F^\perp$, alors $\langle x, x \rangle = 0$ donc $x = 0$.

Pour $F^{\perp\perp} = F$:

- $F \subset F^{\perp\perp}$ car si $y \in F$, alors $\forall x \in F^\perp, \langle y, x \rangle = 0$
- $\dim F^{\perp\perp} = \dim E - \dim F^\perp = \dim F$
- Donc $F = F^{\perp\perp}$



Isomorphisme canonique

Proposition

L'application :

$$s : E \to E^* \quad \text{où} \quad s(y) : E \to \mathbb{R}$$
$$y \mapsto s(y) \qquad\qquad x \mapsto \langle x, y \rangle$$

est un isomorphisme de E sur E^*.

Démonstration.

s est linéaire et injective car si $s(y) = 0$, alors $\langle y, y \rangle = 0$ donc $y = 0$.
Comme $\dim E = \dim E^*$, s est un isomorphisme. □

Définition de la projection

Definition

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Tout $x \in E$ s'écrit de manière unique :

$$x = u + v \quad \text{avec} \quad u \in F, v \in F^{\perp}$$

On appelle u la **projection orthogonale** de x sur F et on note $p_F(x) = u$.

Propriétés de la projection

Proposition

Soit F un sous-espace vectoriel de E et $\{e_1, \ldots, e_k\}$ une base orthonormée de F.

1. $\forall x \in E, p_F(x) - x \in F^{\perp}$ *et* $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$
2. $\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i \rangle e_i$
3. $p_F \circ p_F = p_F$
4. $\forall x \in E, \|x - p_F(x)\| = \inf_{y \in F} \|x - y\|$

Démonstration (2)

Démonstration.

Soit $x = \sum_{i=1}^{k} a_i e_i + v$ avec $v \in F^{\perp}$.
Pour trouver a_i, calculons :

$$\langle x, e_i \rangle = \langle a_1 e_1 + \cdots + a_k e_k + v, e_i \rangle = a_i$$

Donc $p_F(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i \rangle e_i$. □

Démonstration (4)

Démonstration.

Pour tout $y \in F$:

$$\begin{aligned} \|x-y\|^2 &= \|x - p_F(x) + p_F(x) - y\|^2 \\ &= \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2 \\ &\geq \|x - p_F(x)\|^2 \end{aligned}$$

car $x - p_F(x) \in F^\perp$ et $p_F(x) - y \in F$.
L'égalité a lieu quand $y = p_F(x)$. □

Exemple de projection

Example

Soit F le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + y + z = 0$.
Une base orthonormée de F est :

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$$

La projection de $x = (1, 2, 3)$ sur F est :

$$p_F(x) = \langle x, e_1 \rangle e_1 + \langle x, e_2 \rangle e_2$$

Application : moindres carrés

Problème des moindres carrés

Trouver le vecteur y dans un sous-espace F qui minimise $\|x - y\|$.
La solution est $y = p_F(x)$.

Example

Régression linéaire : trouver la droite qui approxime le mieux un ensemble de points.

Résumé de la séance

- Définition des sous-espaces orthogonaux
- Propriétés des orthogonaux
- Isomorphisme entre E et son dual
- Projection orthogonale et ses propriétés
- Applications aux moindres carrés

Prochaine séance : Endomorphisme adjoint et groupe orthogonal