Espaces Euclidiens et Formes Quadratiques

Séance 3: Inégalités et représentations matricielles

Hamza El Mahjour
ENSAT

Plan de la séance

Norme et distance

Définition

Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

- La **norme** est définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$
- La **distance** entre deux points u et v est $\|v - u\|$

Propriétés

- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Inégalité triangulaire

Theorem

Pour tous $x, y \in E$, on a :

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Pour démontrer cette inégalité, nous avons besoin de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Theorem

Pour tous $x, y \in E$, on a :

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

L'égalité a lieu si et seulement si x et y sont liés.

Démonstration de Cauchy-Schwarz

Démonstration.

Si $\|x\| = \|y\| = 0$, alors $x = y = 0$ et l'inégalité est vraie.
Sinon, supposons $\|y\| \neq 0$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 \geq 0$$

Ce polynôme en λ est toujours positif, donc son discriminant est négatif :

$$\langle x, y\rangle^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$$



Cas d'égalité

Suite.

Si $\langle x, y\rangle^2 = \|x\|^2\|y\|^2$, alors le discriminant est nul.
Il existe donc $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\|x + \lambda_0 y\|^2 = 0$$

Ainsi $x + \lambda_0 y = 0$, donc x et y sont liés. □

Exemple dans $\mathbb{R}^2$

Example

Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique :

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos(\theta)$$

où θ est l'angle entre x et y.
Puisque $|\cos(\theta)| \leq 1$, on a :

$$|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\| |\cos(\theta)| \leq \|x\| \|y\|$$

Démonstration de l'inégalité triangulaire

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle \\
&\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| \\
&\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \quad \text{(Cauchy-Schwarz)} \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

Donc $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. □

Matrice d'une forme bilinéaire

Definition

Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E, et f une forme bilinéaire.
La **matrice de** f dans la base $\{e_i\}$ est :

$$M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} f(e_1, e_1) & \cdots & f(e_1, e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(e_n, e_1) & \cdots & f(e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

Expression matricielle

Pour $x = \sum x_i e_i$, $y = \sum y_i e_i$, on a :

$$f(x,y) = (x_1 \cdots x_n) M(f)_{e_i} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Example

Le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ a pour matrice I_n.

Exemple de matrice

Example

Soit $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + 7x_2y_3 - x_1y_2 + 4x_1y_3 + 8x_3y_1$$

Sa matrice est :

$$M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Changement de base

Formule de changement de base

Soient $\{e_i\}$ et $\{e'_i\}$ deux bases de E, et P la matrice de passage.
Alors :

$$M(f)_{e'_i} = {}^tPM(f)_{e_i}P$$

Exemple de changement de base

Example

Soit $E = \mathbb{R}^2$, $\{e_1, e_2\}$ la base canonique, et :

$$e_1' = -e_1 + e_2, \quad e_2' = e_1 - 2e_2$$

Soit f définie par :

$$f(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2 + 2x_1y_2 + x_2y_1$$

On a :

$$M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Résumé de la séance

- Inégalité de Cauchy-Schwarz et ses applications
- Inégalité triangulaire pour la norme
- Représentation matricielle des formes bilinéaires
- Changement de base pour les formes bilinéaires

Prochaine séance : Sous-espaces orthogonaux et projections