Espaces Euclidiens et Formes Quadratiques

Séance 2: Orthogonalité et procédé de Gram-Schmidt

Soufiane Mezroui
ENSAT

Plan de la séance

1. Procédé d'orthonormalisation de Schmidt

Question fondamentale

Question

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace Euclidien. Existe-t-il une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E telle que :

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

pour tous $x = \sum x_i e_i$, $y = \sum y_i e_i$?

Pour répondre à cette question, nous allons introduire les notions de base orthonormée.

Définitions fondamentales

Definition

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace Euclidien.

- La **norme** d'un vecteur x est $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$
- Deux vecteurs x et y sont **orthogonaux** si $\langle x, y \rangle = 0$
- Une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est **orthogonale** si $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$
- Une base est **orthonormée** si elle est orthogonale et $\|e_i\| = 1$ pour tout i

Propriétés des bases orthonormées

Exercice

1. Soit $\{e_1\}$ une base orthogonale de E. Montrer que $\{\frac{e_1}{\|e_1\|}\}$ est une base orthonormée.
2. Soit $\{v_1, \ldots, v_r\}$ une famille de vecteurs non nuls deux à deux orthogonaux. Montrer qu'elle est libre.

Theorem

Dans un espace Euclidien, il existe toujours une base orthonormée.

Démonstration du théorème

La démonstration se fait par récurrence sur la dimension n de E :

- Pour $n = 1$: tout vecteur non nul constitue une base orthogonale
- Hypothèse de récurrence : le résultat est vrai pour les espaces de dimension $\leq n - 1$
- Soit $v \neq 0$ et $G = \{x \in E | \langle x, v \rangle = 0\}$
- $\dim G = n - 1$ (théorème du rang)
- Par hypothèse de récurrence, G admet une base orthogonale $\{t_1, \ldots, t_{n-1}\}$
- $\{v, t_1, \ldots, t_{n-1}\}$ est une base orthogonale de E

Procédé de Gram-Schmidt

Soit E un espace Euclidien et $\{v_1, \ldots, v_r\}$ une famille libre.

1. On pose $e_1 = v_1$
2. On cherche $e_2 = v_2 + \lambda e_1$ tel que $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$
3. On détermine $\lambda = -\frac{\langle e_1, v_2 \rangle}{\|e_1\|^2}$
4. On continue ainsi pour construire une base orthogonale
5. On normalise pour obtenir une base orthonormée

Exemple de Gram-Schmidt

Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. $e_1 = u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
2. $\lambda = -\frac{\langle e_1, u_2 \rangle}{\|e_1\|^2} = -\frac{1}{2}$
3. $e_2 = u_2 + \lambda e_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$
4. On continue le procédé pour e_3

Résumé de la séance

- Notions de base orthogonale et orthonormée
- Existence d'une base orthonormée dans tout espace Euclidien
- Procédé de Gram-Schmidt pour construire une base orthonormée
- Exemple concret d'application

Prochaine séance : Inégalité de Cauchy-Schwarz et représentation matricielle