Espaces Euclidiens et Formes Quadratiques

Séance 13: Sous-espaces orthogonaux et endomorphismes adjoints

Hamza El Mahjour
ENSAT

Plan de la séance

1. Sous-espaces orthogonaux
2. Endomorphisme adjoint

Définition

Definition

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, $A \subset E$, et $f : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire.
L'**orthogonal** de A est :

$$A^{\perp} = \{x \in E \mid \forall a \in A, f(x, a) = 0\}$$

Propriétés

- $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel
- $\{0\}^{\perp} = E$, $E^{\perp} = N(q)$
- $N(q) \subset A^{\perp}$

Annulateur

Definition

Soit F un sous-espace vectoriel de E.
L'**annulateur** de F est :

$$F^0 = \{\varphi \in E^* \mid \forall x \in F, \varphi(x) = 0\}$$

Lemma

Si E est de dimension finie, alors :

$$\dim E = \dim F + \dim F^0$$

Relation entre orthogonal et annulateur

Proposition

Soit $s : E \to E^*$ *définie par* $s(y)(x) = f(x, y)$.
Alors :

$$A^{\perp} = (s(A))^0$$

Dimension de l'orthogonal

Proposition

Soient F un sous-espace vectoriel de E, $q : E \to \mathbb{K}$ une forme quadratique, f sa forme polaire, et $N = N(q)$. Alors :

$$\dim E = \dim F + \dim F^{\perp} - \dim(F \cap N)$$

Démonstration

Démonstration.

Soit $s : E \to E^*$ définie par $s(y)(x) = f(x, y)$.
On a :

$$\dim s(F) + \dim(s(F))^0 = \dim E^* = \dim E$$

Mais :

$$(s(F))^0 = F^\perp \quad \text{et} \quad \dim s(F) = \dim F - \dim(F \cap N)$$

Donc :

$$\dim E = \dim F - \dim(F \cap N) + \dim F^\perp$$

Double orthogonal

Proposition

Avec les mêmes notations :

$$F^{\perp\perp} = F + N$$

Sous-espaces isotropes

Definition

Un sous-espace vectoriel F de E est **isotrope** si :

$$F \cap F^{\perp} \neq \{0\}$$

Proposition

$$E = F \oplus F^{\perp} \iff F \text{ est non isotrope}$$

Définition

Definition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$,
$q : E \to \mathbb{K}$ une forme quadratique non dégénérée, f sa forme polaire, et $g \in \mathrm{End}(E)$.
Il existe un unique endomorphisme $g^* \in \mathrm{End}(E)$ tel que :

$$\forall x, y \in E, f(g(x), y) = f(x, g^*(y))$$

g^* est l'**adjoint** de g relativement à f.

Expression matricielle

Proposition

Soit $\{e_i\}$ *une base de* E, $S = M(f)_{e_i}$, *et* $M = M(g)_{e_i}$.
Alors :

$$M(g^*)_{e_i} = S^{-1t} M S$$

Démonstration

Démonstration.

Pour $x = \sum x_i e_i$, $y = \sum y_i e_i$:

$$f(g(x), y) = {}^t(MX)SY = {}^tX{}^tMSY$$

$$f(x, g^*(y)) = {}^tXS(M(g^*)Y)$$

Égalité pour tous X, Y implique :

$${}^tMS = SM(g^*)$$

Donc :

$$M(g^*) = S^{-1}{}^tMS$$

Exemple

Example

Soit $E = \mathbb{R}^2$, $q(x) = x_1^2 - 2x_2^2$, donc :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Soit g tel que :

$$M(g)_{e_i} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Alors :

$$M(g^*) = S^{-1}\,{}^tMS = \begin{pmatrix} a & -2c \\ \end{pmatrix}$$

Propriétés de l'adjoint

Proposition

Pour tous $g, h \in \mathrm{End}(E)$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$ *:*

1. $g^{**} = g$
2. $(\mathrm{id})^* = \mathrm{id}$
3. $(g+h)^* = g^* + h^*$
4. $(\lambda g)^* = \lambda g^*$
5. $(g \circ h)^* = h^* \circ g^*$
6. $\mathrm{rg} g^* = \mathrm{rg} g$
7. $\det g^* = \det g$

Résumé de la séance

- Orthogonal d'un sous-ensemble • Relation entre orthogonal et annulateur • Dimension de l'orthogonal • Sous-espaces isotropes • Endomorphisme adjoint pour une forme bilinéaire • Propriétés de l'adjoint

Prochaine séance : Groupe orthogonal d'une forme quadratique