Espaces Euclidiens et Formes Quadratiques

Séance 10: Formes bilinéaires et formes quadratiques - notions de base

Hamza El Mahjour
ENSAT

Plan de la séance

Définition du rang

Definition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et f une forme bilinéaire sur E.
Le **rang** de f est le rang de sa matrice dans une base quelconque :

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}M(f)_{e_i}$$

Indépendance de la base

Le rang ne dépend pas de la base choisie.

Forme non dégénérée

Definition

f est dite **non dégénérée** si :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim E$$

i.e. si $\det M(f)_{e_i} \neq 0$.

Example

Tout produit scalaire est non dégénéré.

Exemple de forme dégénérée

Example

Soit $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = -3x_1y_1+3x_3y_3-3x_1y_2-4x_1y_3+x_2y_3-3x_2y_1-4x_3y_1-$$

Sa matrice dans la base canonique est :

$$M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -4 \\ -3 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

On a $\det M(f)_{e_i} = 0$, donc f est dégénérée.

Application linéaire associée

Definition

Soit l'application :

$$s : E \to E^* \quad \text{où} \quad s(y) : E \to \mathbb{K}$$
$$y \mapsto s(y) \qquad\qquad x \mapsto f(x, y)$$

On a :

$$M(s)_{e_i, v_j} = M(f)_{e_i}$$

où $\{v_j\}$ est la base duale de $\{e_i\}$.

Noyau d'une forme bilinéaire

Definition

Le **noyau** de f est :

$$N(f) = \{y \in E \mid \forall x \in E, f(x, y) = 0\} = \ker s$$

Dimension

Si E est de dimension finie :

$$\dim E = \mathrm{rg}(f) + \dim N(f)$$

Exemple de calcul de noyau

Example

Reprenons la forme :

$$f(x,y) = -3x_1y_1+3x_3y_3-3x_1y_2-4x_1y_3+x_2y_3-3x_2y_1-4x_3y_1-$$

Le noyau $N(f)$ est l'ensemble des solutions de :

$$M(f)_{e_i} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On trouve :

$$N(f) = \{ z_2 (\quad 1 \quad 5 \quad 1) \; z_2 \in \mathbb{R} \}$$

Définition

Definition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$.
Une application $q : E \to \mathbb{K}$ est une **forme quadratique** si :

$$\forall x = \sum x_i e_i \in E, q(x) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$$

avec $a_{ij} \in \mathbb{K}$.

Indépendance de la base

La notion de forme quadratique ne dépend pas de la base choisie.

Lien avec les formes bilinéaires symétriques

Il y a une correspondance bijective entre :

1. Formes bilinéaires symétriques $f : E \times E \to \mathbb{K}$
2. Formes quadratiques $q : E \to \mathbb{K}$

donnée par :

$$q(x) = f(x,x), \quad f(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$$

Démonstration

Démonstration.

Si f est bilinéaire symétrique, alors :

$$q(x) = f(x, x) = \sum a_{ij} x_i x_j$$

est une forme quadratique.
Réciproquement, si q est une forme quadratique :

$$q(x) = \sum a_{ij} x_i x_j$$

alors la forme polarisée :

$$f(x, y) = \sum a_{ij} x_i y_j$$

Exemple : intégrale

Example

Sur $\mathbb{R}[x]$, l'application :

$$q(P) = \int_0^1 P(x)^2 dx$$

est une forme quadratique.
Sa forme polaire est :

$$f(P, Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$$

Généralisation en dimension infinie

Definition

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (pas nécessairement de dimension finie).
$q : E \to \mathbb{K}$ est une **forme quadratique** s'il existe une forme bilinéaire symétrique f telle que :

$$\forall x \in E, q(x) = f(x, x)$$

Notions associées aux formes quadratiques

Definition

Soit $q : E \to \mathbb{K}$ une forme quadratique de forme polaire f.

- Le **rang** de q est le rang de f
- Le **noyau** de q est le noyau de f
- q est **non dégénérée** si f est non dégénérée
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, q est **définie positive** si f est définie positive

Vecteurs isotropes

Definition

Soit $q : E \to \mathbb{K}$ une forme quadratique.

- Un vecteur $x \in E$ est **isotrope** si $q(x) = 0$
- Le **cône isotrope** est :

$$\mathcal{I}(q) = \{x \in E \mid q(x) = 0\}$$

Remarque

$\mathcal{I}(q)$ n'est pas un espace vectoriel, mais un cône : si $x \in \mathcal{I}(q)$, alors $\lambda x \in \mathcal{I}(q)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exemple

Example

Soit $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$

Sa forme polaire est :

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 - x_2 y_2$$

Le cône isotrope est :

$$\mathcal{I}(q) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = \pm x_2\}$$

Exercice

Exercice

Montrer que :

$$N(q) \subset \mathcal{I}(q)$$

Résumé de la séance

- Rang et noyau d'une forme bilinéaire • Formes non dégénérées • Correspondance entre formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques • Forme polaire • Vecteurs isotropes et cône isotrope

Prochaine séance : Réduction des formes quadratiques par la méthode de Gauss