Espaces Euclidiens et Formes Quadratiques

Séance 1: Introduction et produits scalaires

Hamza El Mahjour
ENSAT

Plan du cours

1 Produit Scalaire

Définition des formes bilinéaires

Definition

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une application $f : E \times E \to \mathbb{K}$ est :

- **Bilinéaire** si linéaire par rapport à chaque variable
- **Symétrique** si $f(x, y) = f(y, x)$
- **Positive** si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $f(x, x) \geq 0$
- **Définie positive** si positive et $f(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Définition du produit scalaire

Definition

Soit E un espace vectoriel réel. Un **produit scalaire** sur E est une application :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$$

bilinéaire, symétrique et définie positive.
Un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire est appelé **espace Euclidien**.

Exemple 1 : Produit scalaire canonique

Example

Sur $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique est défini par :

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$.
Dans $\mathbb{R}^2$: $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 = \|x\| \|y\| \cos(\theta)$

où θ est l'angle non orienté formé entre x et y

Exemple 2 : Produit scalaire associé à une base

Example

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base.
Pour $x = \sum x_i e_i$, $y = \sum y_i e_i$, on définit :

$$\langle x, y \rangle_{e_i} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

Exemple 3 : Produit scalaire sur les matrices

Example

Sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, pour :

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$$

on définit :

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(AB) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

Exemple 4 : Produit scalaire sur les polynômes

Example

Sur $\mathbb{R}[x]$, pour $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, on définit :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$$

Note : $\mathbb{R}[x]$ n'est pas de dimension finie, donc n'est pas un espace Euclidien.

Expression en base

Expression matricielle

Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E et f une forme bilinéaire.
Pour $x = \sum x_i e_i$, $y = \sum y_i e_i$, on a :

$$f(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

où $a_{ij} = f(e_i, e_j)$.
f est symétrique ssi $a_{ij} = a_{ji}$ pour tous i, j.

Exemples de formes bilinéaires

Example

La forme $f(x,y) = 2x_1y_1 + x_2y_2 + 5x_1y_2 + 5x_2y_1$ est symétrique.

Example

La forme $f(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_1y_2 + x_2y_1$ n'est pas symétrique.

Example

La forme $f(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1$ n'est pas bilinéaire.

Résumé de la séance

- Définition des formes bilinéaires et propriétés
- Définition du produit scalaire et espaces Euclidiens
- Exemples de produits scalaires sur différents espaces
- Expression matricielle des formes bilinéaires

Prochaine séance : Bases orthonormées et procédé de Gram-Schmidt