Université Abdelmalek Essaâdi	**Contrôle Continu 1**	**Nom:** _____
ENSA de Tanger	**ALGÈBRE III**	**Prénom:** _____
S3-AP2-2025-2026	**Durée: 1 h 30**	**Salle :** _____

Les étudiants sont invités à expliquer brièvement leur raisonnement et à indiquer les étapes clés des calculs, en évitant à la fois les développements excessifs et les réponses trop succinctes.

1. (3 points) Montrer que si une matrice A est nilpotente ($A^k = 0_n$ à partir d'un certain $k > 0$ dans $\mathbb{N}$) alors son spectre est nul.

2. (12 points) Soit $\beta \in \mathbb{C}$, on définit la matrice A_β de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $A_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta+1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & \beta+1 \end{pmatrix}$.

   1. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A_β.

   2. Pour quelles valeurs de β la matrice A_β est-elle diagonalisable ?

3. Montrer que A_0 est nilpotente et indiquer son indice de nilpotence k.

4. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. On suppose que $\beta \neq 0$. En utilisant l'exercice précédent, déduire que A_β n'est pas nilpotente.

3. (3 points) Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Schmidt la base

$$u = (1, 0, 1), v = (1, 1, 1), w = (-1, -1, 0).$$

4. (2 points) Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes réels. Dites si l'application suivante est un produit scalaire ?

$$\varphi : (P, Q) \mapsto P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$$

(Justifier)