

Algèbre III

2ème Année Préparatoire ENSA

Tanger

Notes de cours

COURS D'ALGÈBRE 3, UNIVERSITÉ ABDELMALEK ESSAÂDI
HTTPS ://HAMZAELMAHJOUR.GITHUB.IO

Ces petites notes ont pour objectif de présenter les notions et les méthodes essentielles du cours. Elles privilégient les calculs et les exemples simples, sans chercher à développer toutes les subtilités théoriques qui peuvent apparaître dans un cours d'algèbre plus avancé.

Première version, novembre 2026

Table des matières

1 Réduction des endomorphismes **1**

1.1 Introduction . . . 1
1.2 Valeurs propres et vecteurs propres . . . 1
1.2.1 Sous-espaces propres . . . 2
1.3 Polynôme caractéristique . . . 3
1.4 Multiplicité des valeurs propres . . . 3
1.5 Diagonalisation . . . 4
1.5.1 Un critère à partir du polynôme caractéristique . . . 6
1.6 Théorème de Cayley–Hamilton . . . 6
1.6.1 Calcul de l'inverse d'une matrice . . . 7
1.7 Trigonalisation . . . 8
1.7.1 Comment construire une base de trigonalisation ? . . . 8
1.8 Bilan et méthode générale . . . 8

2 Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques **10**

2.1 Introduction . . . 10
2.2 Formes bilinéaires . . . 10
2.3 Matrice d'une forme bilinéaire . . . 11
2.3.1 Changement de base . . . 11
2.4 Symétrie et formes bilinéaires symétriques . . . 12
2.5 Formes quadratiques . . . 12
2.5.1 Forme polaire . . . 13
2.6 Rang et noyau d'une forme bilinéaire . . . 14
2.7 Réduction d'une forme quadratique : méthode de Gauss . . . 14
2.7.1 Signature d'une forme quadratique . . . 15
2.8 Définitude . . . 16
2.9 Bilan et exercices . . . 16

3 Produit scalaire et orthogonalité **18**

3.1 Introduction . . . 18
3.2 Produit scalaire . . . 18
3.3 Norme associée à un produit scalaire . . . 19
3.4 Orthogonalité . . . 20
3.5 Bases orthonormales et procédé de Gram–Schmidt . . . 20
3.6 Orthogonal d'un sous-espace . . . 21
3.7 Projection orthogonale et distance . . . 22

3.8 Matrices de projection et de symétrie 23
3.9 Matrices orthogonales et endomorphismes symétriques 23
3.10 Quelques méthodes à retenir 25
3.11 Exercices d'application 25

Conclusion **26**

Chapitre 1

Réduction des endomorphismes

1.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons appris à représenter une application linéaire par une matrice. Ce passage aux matrices est très utile : il permet de remplacer une application abstraite par un tableau de nombres et de manipuler des objets que nous connaissons déjà. Cependant, toutes les matrices ne sont pas aussi agréables à étudier. Certaines possèdent beaucoup de coefficients nuls, d'autres sont diagonales, et il est évident que les calculs deviennent plus simples dans ce dernier cas.

L'objectif de ce chapitre est justement de répondre à la question suivante : peut-on choisir une base de l'espace vectoriel dans laquelle la matrice d'un endomorphisme devient plus simple ? Dans un premier temps, nous chercherons une matrice diagonale. Lorsque cela n'est pas possible, nous essayerons au moins d'obtenir une matrice triangulaire supérieure.

Cette démarche s'appelle la réduction des endomorphismes. Les valeurs propres et les vecteurs propres vont jouer un rôle essentiel dans cette construction.

Dans tout ce chapitre, E est un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps $\mathbb{K}$, généralement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1.2 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 1.1. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de f s'il existe un vecteur $x \in E$, non nul, tel que

$$f(x) = \lambda x.$$

Un tel vecteur x est appelé **vecteur propre** associé à λ.

Il faut bien insister sur la condition $x \neq 0$. En effet, le vecteur nul vérifie toujours $f(0) = \lambda 0$, quelle que soit la valeur de λ. Il ne nous apporte donc aucune information.

L'idée derrière cette définition est simple : un vecteur propre est un vecteur dont la direction est conservée par l'application linéaire. L'application peut changer sa longueur, voire inverser son sens, mais le vecteur reste sur la même droite vectorielle.

Exemple 1.2. Considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ représenté dans la base canonique par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pour $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$, on a

$$f(e_1) = 2e_1, \qquad f(e_2) = 3e_2.$$

Donc 2 et 3 sont des valeurs propres de f, et les vecteurs e_1, e_2 sont des vecteurs propres associés respectivement à 2 et 3.

Exemple 1.3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = (x+y, y).$$

Sa matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cherchons les vecteurs propres. L'équation $f(x,y) = \lambda(x,y)$ donne

$$\begin{cases} x+y = \lambda x, \\ y = \lambda y. \end{cases}$$

Si $y \neq 0$, la deuxième équation impose $\lambda = 1$, puis la première donne $y = 0$, ce qui est contradictoire. On doit donc avoir $y = 0$ et $x \neq 0$. Ainsi, 1 est l'unique valeur propre et ses vecteurs propres sont les $(x,0)$ avec $x \neq 0$.

1.2.1 Sous-espaces propres

Définition 1.4. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on appelle **sous-espace propre** associé à λ le sous-espace

$$E_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda \,\mathrm{Id}).$$

Ses éléments sont les vecteurs propres associés à λ, auxquels on ajoute le vecteur nul.

La définition est particulièrement pratique, car elle transforme la recherche des vecteurs propres en un problème de noyau. Pour trouver E_λ, il suffit de résoudre le système linéaire

$$(A - \lambda I_n)X = 0,$$

où A est la matrice de f dans une base donnée.

Proposition 1.5. *Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f si et seulement si*

$$\mathrm{Ker}(f - \lambda \,\mathrm{Id}) \neq \{0\}.$$

Lorsque E est de dimension finie, cela équivaut à

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Démonstration. La première équivalence est une reformulation de la définition. Pour la deuxième, le système homogène $(A - \lambda I_n)X = 0$ possède une solution non nulle si et seulement si la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible, ce qui équivaut à l'annulation de son déterminant. □

Remarque 1.6. Un endomorphisme peut ne pas avoir de valeur propre réelle. Par exemple, la rotation d'angle $\pi/2$ dans $\mathbb{R}^2$ est représentée par

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est $X^2 + 1$, qui ne possède pas de racine réelle. En revanche, si l'on travaille sur $\mathbb{C}$, les valeurs propres sont i et $-i$.

1.3 Polynôme caractéristique

Définition 1.7. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **polynôme caractéristique** de A le polynôme

$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A).$$

On définit de la même manière le polynôme caractéristique d'un endomorphisme f en choisissant une matrice A qui le représente. Le polynôme obtenu ne dépend pas du choix de la base.

Les valeurs propres de f sont exactement les racines de son polynôme caractéristique dans le corps considéré. Le calcul du déterminant va donc nous permettre de trouver les valeurs propres.

Exemple 1.8. Prenons

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$\chi_A(X) = \det \begin{pmatrix} X-2 & -1 \\ 0 & X-3 \end{pmatrix} = (X-2)(X-3).$$

Les valeurs propres de A sont donc 2 et 3.

Exemple 1.9. Considérons maintenant la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\chi_B(X) = \det \begin{pmatrix} X & 1 \\ -1 & X \end{pmatrix} = X^2 + 1.$$

Sur $\mathbb{R}$, cette matrice ne possède aucune valeur propre. Sur $\mathbb{C}$, elle possède les deux valeurs propres i et $-i$.

Proposition 1.10. *Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors χ_A est un polynôme unitaire de degré n. De plus, le coefficient de X^{n-1} est égal à $-\operatorname{tr}(A)$ et le terme constant est égal à $(-1)^n \det(A)$.*

Remarque 1.11. Il ne faut pas confondre le polynôme caractéristique et le polynôme minimal. Nous reviendrons sur le rôle du polynôme caractéristique avec le théorème de Cayley–Hamilton. Pour les calculs de ce chapitre, la formule du déterminant est généralement suffisante.

1.4 Multiplicité des valeurs propres

Définition 1.12. Soit λ une valeur propre de f. Sa **multiplicité algébrique** est sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique χ_f. La dimension du sous-espace propre E_λ est appelée **multiplicité géométrique** de λ.

Il est important de distinguer ces deux notions. La multiplicité algébrique se lit dans la factorisation du polynôme caractéristique, alors que la multiplicité géométrique se calcule en déterminant le noyau de $A - \lambda I_n$.

Proposition 1.13. *Pour toute valeur propre λ, on a*

$$1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_a(\lambda),$$

où $m_a(\lambda)$ désigne la multiplicité algébrique de λ.

Démonstration. La première inégalité vient du fait que E_λ contient au moins un vecteur propre non nul. Pour la deuxième, on peut compléter une base de E_λ en une base de E. Dans cette base, la matrice de f présente un bloc diagonal égal à λI de taille $\dim(E_\lambda)$. Le facteur $(X-\lambda)^{\dim(E_\lambda)}$ divise alors le polynôme caractéristique. D'où l'inégalité. □

Exemple 1.14. Considérons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a $\chi_A(X) = (X-1)^2$. La valeur propre 1 est donc de multiplicité algébrique 2. En revanche,

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_1 = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Ainsi, $\dim(E_1) = 1$. La multiplicité géométrique est strictement inférieure à la multiplicité algébrique.

Proposition 1.15. *Des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe. En particulier, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont des valeurs propres distinctes et si $x_i \in E_{\lambda_i}$, alors*

$$x_1 + \cdots + x_r = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \cdots = x_r = 0.$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur r. Pour $r = 1$, le résultat est immédiat. Supposons le résultat vrai pour $r-1$ valeurs propres et écrivons

$$x_1 + \cdots + x_r = 0.$$

En appliquant $f - \lambda_r \mathrm{Id}$, on obtient

$$\sum_{i=1}^{r-1} (\lambda_i - \lambda_r) x_i = 0.$$

Les $r-1$ vecteurs appartiennent à des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes. Par l'hypothèse de récurrence, $(\lambda_i - \lambda_r)x_i = 0$ pour tout $i < r$. Comme les valeurs propres sont distinctes, $x_i = 0$ pour $i < r$, puis $x_r = 0$. □

1.5 Diagonalisation

Définition 1.16. On dit que f est **diagonalisable** s'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de f. Dans ce cas, la matrice de f dans cette base est diagonale.

Autrement dit, diagonaliser un endomorphisme consiste à trouver une base dans laquelle son action est particulièrement simple. Si la base est formée de vecteurs propres $v_1, \dots, v_n$ associés respectivement à $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alors

$$[f]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Théorème 1.17. *Un endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si*

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} E_\lambda.$$

En dimension finie, cela équivaut à

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim(E_\lambda) = n.$$

Démonstration. Si f est diagonalisable, il existe une base de E formée de vecteurs propres. En regroupant ces vecteurs selon leurs valeurs propres, on obtient une base de E constituée de bases des sous-espaces E_λ. Cela donne la somme directe annoncée.

Réciproquement, si la somme des sous-espaces propres est égale à E, alors en prenant une base de chaque sous-espace propre, leur réunion forme une base de E constituée de vecteurs propres. L'endomorphisme est donc diagonalisable. □

Corollaire 1.18. *Si un endomorphisme de dimension n possède n valeurs propres distinctes, alors il est diagonalisable.*

Ce résultat est très pratique, mais attention : avoir moins de n valeurs propres ne signifie pas automatiquement que l'endomorphisme n'est pas diagonalisable. Il faut examiner les dimensions des sous-espaces propres.

Exemple 1.19. Reprenons

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda = 2$, on résout

$$(A - 2I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = 0.$$

On peut prendre $v_1 = (1,0)$. Pour $\lambda = 3$, on obtient

$$(A - 3I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = x,$$

et on peut prendre $v_2 = (1,1)$. Les deux vecteurs sont linéairement indépendants et forment donc une base de $\mathbb{R}^2$.

La matrice de passage est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est donc diagonalisable.

Exemple 1.20. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

possède une seule valeur propre 1. Son sous-espace propre est de dimension 1. Comme l'espace est de dimension 2, il est impossible d'extraire une base de $\mathbb{R}^2$ à partir des vecteurs propres. Cette matrice n'est donc pas diagonalisable.

1.5.1 Un critère à partir du polynôme caractéristique

Proposition 1.21. *Si le polynôme caractéristique de f est scindé sur $\mathbb{K}$ et possède n racines simples, alors f est diagonalisable.*

Remarque 1.22. La condition « toutes les racines sont simples » est suffisante, mais elle n'est pas nécessaire. Par exemple, l'identité Id_E est diagonalisable même si son polynôme caractéristique est $(X-1)^n$.

Théorème 1.23 (Critère par le polynôme minimal)**.** *Un endomorphisme est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si son polynôme minimal est produit de facteurs du premier degré deux à deux distincts sur $\mathbb{K}$.*

Ce dernier critère est théoriquement très intéressant. Dans les exercices de calcul, on utilise toutefois le plus souvent le critère portant sur la somme des dimensions des sous-espaces propres.

1.6 Théorème de Cayley–Hamilton

Nous avons introduit le polynôme caractéristique comme un outil pour déterminer les valeurs propres. Il possède une autre propriété remarquable : lorsqu'on remplace l'indéterminée X par la matrice A, on obtient la matrice nulle. C'est le contenu du théorème de Cayley–Hamilton.

Théorème 1.24 (Cayley–Hamilton)**.** *Toute matrice carrée annule son propre polynôme caractéristique. Autrement dit, si*

$$\chi_A(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0,$$

alors

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I_n = 0.$$

De manière équivalente, $\chi_f(f) = 0$ pour tout endomorphisme f de dimension finie.

Exemple 1.25. Pour

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

on a déjà calculé

$$\chi_A(X) = X^2 - 5X + 6.$$

Le théorème de Cayley–Hamilton nous donne

$$A^2 - 5A + 6I_2 = 0.$$

On peut vérifier cette égalité directement. En effet,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix},$$

et donc

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Remarque 1.26. Le théorème de Cayley–Hamilton est souvent utilisé pour simplifier les puissances d'une matrice. Dans l'exemple précédent, on a

$$A^2 = 5A - 6I_2.$$

On peut ensuite exprimer toute puissance A^k, avec $k \geq 2$, comme une combinaison linéaire de A et de I_2.

1.6.1 Calcul de l'inverse d'une matrice

Corollaire 1.27. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible et soit*

$$\chi_A(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0.$$

Alors $a_0 \neq 0$ et

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}\left(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_2A + a_1I_n\right).$$

Démonstration. Comme A est inversible, $\det(A) \neq 0$, donc $a_0 = (-1)^n \det(A) \neq 0$. Le théorème de Cayley–Hamilton donne

$$A\left(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1I_n\right) = -a_0I_n.$$

Il suffit de diviser par $-a_0$ pour obtenir la formule. □

Exemple 1.28. Pour la matrice A de l'exemple précédent, $a_0 = 6$. On obtient

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}(A - 5I_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

On retrouve bien l'inverse par la méthode habituelle.

1.7 Trigonalisation

La diagonalisation n'est pas toujours possible. Mais cela ne signifie pas que la matrice ne peut pas être simplifiée. On peut chercher une base dans laquelle elle devient triangulaire supérieure. Cette opération est appelée trigonalisation.

Définition 1.29. Un endomorphisme f est dit **trigonalisable** sur $\mathbb{K}$ s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.

Théorème 1.30. *Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ est trigonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.*

Remarque 1.31. Sur le corps des nombres complexes, tout polynôme non constant est scindé en facteurs du premier degré. Par conséquent, tout endomorphisme d'un espace vectoriel complexe de dimension finie est trigonalisable.

Sur $\mathbb{R}$, ce n'est pas toujours vrai. La rotation d'angle $\pi/2$ étudiée précédemment n'est pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$, car son polynôme caractéristique X^2+1 n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

Exemple 1.32. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est déjà triangulaire supérieure. Elle est donc trigonalisable. Nous avons vu qu'elle n'est pourtant pas diagonalisable. Cela montre bien que la trigonalisation est une propriété moins restrictive que la diagonalisation.

1.7.1 Comment construire une base de trigonalisation ?

L'idée est de construire une suite de sous-espaces stables. On commence par choisir un vecteur propre v_1. Puis on complète ce vecteur en une base de E. Dans cette base, la première colonne de la matrice possède une forme particulière. On poursuit ensuite la construction sur l'espace quotient ou sur le sous-espace restant.

Pour les dimensions faibles, la pratique est assez simple. En dimension 2, si le polynôme caractéristique est scindé, on cherche un vecteur propre v_1 et on le complète par un vecteur v_2. La matrice obtenue est alors triangulaire supérieure.

Méthode 1.33. Pour trigonaliser une matrice de petite dimension :

1. calculer le polynôme caractéristique et ses racines ;
2. déterminer un vecteur propre v_1 associé à une valeur propre λ_1 ;
3. compléter v_1 en une base $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$;
4. calculer les images des vecteurs de cette base et exprimer leurs coordonnées ;
5. si nécessaire, choisir les vecteurs complémentaires de façon à obtenir une matrice triangulaire.

1.8 Bilan et méthode générale

Dans les exercices, il est utile de respecter un ordre de calcul. On évite ainsi de chercher une base propre avant de savoir si les valeurs propres existent et combien elles sont.

Méthode 1.34 (Étudier la réduction d'une matrice). Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Calculer le polynôme caractéristique $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$.
2. Déterminer les valeurs propres, c'est-à-dire les racines de χ_A dans $\mathbb{K}$.
3. Pour chaque valeur propre λ, résoudre $(A - \lambda I_n)X = 0$.
4. Calculer la dimension de chaque sous-espace propre.
5. Si la somme de ces dimensions est n, construire une base de vecteurs propres et écrire $A = PDP^{-1}$.
6. Si la diagonalisation échoue, vérifier si le polynôme caractéristique est scindé ; dans ce cas, une trigonalisation est possible.
7. Utiliser Cayley–Hamilton pour réduire les puissances de A ou calculer son inverse.

Exercice 1.35. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune d'elles :

1. déterminer le polynôme caractéristique ;
2. déterminer les valeurs propres sur $\mathbb{R}$ puis, lorsque cela a un sens, sur $\mathbb{C}$;
3. calculer les sous-espaces propres ;
4. conclure sur la diagonalisation et la trigonalisation sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1.36. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculer χ_A, déterminer les valeurs propres et montrer que A est diagonalisable. Déterminer ensuite une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

Chapitre 2

Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

2.1 Introduction

Jusqu'à maintenant, nous avons étudié les applications linéaires et leurs matrices. Nous allons maintenant introduire un autre type d'objet : les formes bilinéaires. Elles prennent deux vecteurs en entrée et renvoient un scalaire. Cette construction peut sembler un peu abstraite au début, mais elle permet de généraliser plusieurs notions que nous connaissons déjà, notamment le produit scalaire.

Une forme bilinéaire peut être représentée par une matrice. Cette représentation va nous permettre de manipuler ces formes avec les outils de l'algèbre linéaire. Nous nous intéresserons surtout aux formes bilinéaires symétriques et aux formes quadratiques associées.

Dans tout ce chapitre, E désigne un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, sauf indication contraire.

2.2 Formes bilinéaires

Définition 2.1. Une application $B : E \times E \to \mathbb{R}$ est une **forme bilinéaire** si elle est linéaire par rapport à chacune de ses deux variables. C'est-à-dire que, pour tous $x, y, z \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$B(\alpha x + \beta y, z) = \alpha B(x,z) + \beta B(y,z),$$

et

$$B(x, \alpha y + \beta z) = \alpha B(x,y) + \beta B(x,z).$$

On peut donc fixer le premier vecteur et obtenir une forme linéaire par rapport au deuxième. La même chose est vraie en fixant le deuxième vecteur.

Exemple 2.2. Sur $\mathbb{R}^2$, l'application

$$B((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + 3x_2y_1 + 4x_2y_2$$

est une forme bilinéaire. En effet, chaque terme est linéaire par rapport aux coordonnées du premier vecteur et aussi par rapport aux coordonnées du deuxième vecteur.

Exemple 2.3. Sur $\mathbb{R}^2$, l'application

$$B((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 + x_2y_2$$

est également bilinéaire. Il s'agit du produit scalaire usuel, que nous étudierons plus en détail dans le prochain chapitre.

2.3 Matrice d'une forme bilinéaire

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On associe à B la matrice

$$M_{\mathscr{B}}(B) = \big(B(e_i, e_j)\big)_{1 \le i,j \le n}.$$

Proposition 2.4. *Pour tous $x, y \in E$, on a*

$$B(x,y) = X^{\mathsf{T}} M Y,$$

où $X = [x]_{\mathscr{B}}$, $Y = [y]_{\mathscr{B}}$ et $M = M_{\mathscr{B}}(B)$.

Démonstration. Écrivons $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$. Par bilinéarité,

$$B(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j B(e_i, e_j).$$

Cette somme est exactement le produit matriciel $X^{\mathsf{T}} M Y$. □

Exemple 2.5. Pour la forme bilinéaire de l'exemple précédent, sa matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

En prenant $X = (x_1, x_2)^{\mathsf{T}}$ et $Y = (y_1, y_2)^{\mathsf{T}}$, on retrouve

$$B(x,y) = X^{\mathsf{T}} M Y.$$

2.3.1 Changement de base

Il est important de savoir comment la matrice d'une forme bilinéaire change lorsqu'on change de base. Soit $\mathscr{B}$ une base de E et soit $\mathscr{B}'$ une autre base. On note P la matrice de passage dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}'$ dans $\mathscr{B}$.

Proposition 2.6. *Si M est la matrice de B dans la base $\mathscr{B}$, alors sa matrice dans la base $\mathscr{B}'$ est*

$$M' = P^{\mathsf{T}} M P.$$

Démonstration. Si X' et Y' représentent les coordonnées de x et y dans la base $\mathscr{B}'$, alors leurs coordonnées dans $\mathscr{B}$ sont PX' et PY'. Ainsi,

$$B(x,y) = (PX')^{\mathsf{T}} M (PY') = X'^{\mathsf{T}} (P^{\mathsf{T}} M P) Y'.$$

On obtient donc la formule annoncée. □

Remarque 2.7. La transformation $M \mapsto P^{\mathsf{T}} M P$ ne doit pas être confondue avec la similarité $M \mapsto P^{-1} M P$ utilisée pour les matrices d'endomorphismes. Ici, il s'agit d'une congruence.

2.4 Symétrie et formes bilinéaires symétriques

Définition 2.8. Une forme bilinéaire B est dite **symétrique** si

$$B(x,y) = B(y,x), \qquad \forall x,y \in E.$$

Proposition 2.9. *Une forme bilinéaire B est symétrique si et seulement si sa matrice M dans une base donnée est symétrique, c'est-à-dire*

$$M^{\mathsf{T}} = M.$$

Démonstration. Si B est symétrique, alors $B(e_i,e_j) = B(e_j,e_i)$ pour tous i,j. Les coefficients de M sont donc symétriques par rapport à la diagonale. Réciproquement, si $M^{\mathsf{T}} = M$, alors

$$B(y,x) = Y^{\mathsf{T}}MX = X^{\mathsf{T}}M^{\mathsf{T}}Y = X^{\mathsf{T}}MY = B(x,y).$$

□

Exemple 2.10. La forme bilinéaire représentée par

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

est symétrique. En revanche, la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

ne représente pas une forme bilinéaire symétrique dans la base canonique.

Remarque 2.11. Toute forme bilinéaire réelle B peut être décomposée en une partie symétrique et une partie antisymétrique :

$$B(x,y) = \frac{B(x,y)+B(y,x)}{2} + \frac{B(x,y)-B(y,x)}{2}.$$

Dans la suite, nous nous limiterons principalement à la partie symétrique.

2.5 Formes quadratiques

Définition 2.12. À une forme bilinéaire symétrique B, on associe l'application $q : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$q(x) = B(x,x).$$

On appelle q une **forme quadratique**.

Dans une base, si M est la matrice symétrique de B et X le vecteur des coordonnées de x, alors

$$q(x) = X^{\mathsf{T}}MX.$$

C'est une expression polynomiale homogène de degré 2 en les coordonnées de x.

Exemple 2.13. Sur $\mathbb{R}^2$, considérons

$$q(x,y) = 2x^2 + 2xy + 3y^2.$$

La matrice symétrique associée est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

car

$$q(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Attention au coefficient des termes croisés : le terme $2xy$ correspond à deux coefficients égaux à 1 dans la matrice.

2.5.1 Forme polaire

On peut retrouver la forme bilinéaire symétrique à partir de la forme quadratique. Cette relation est souvent appelée identité de polarisation.

Proposition 2.14. *Soit $q(x) = B(x,x)$ une forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique B. Alors*

$$B(x,y) = \frac{1}{2}\big(q(x+y) - q(x) - q(y)\big).$$

On appelle B la forme polaire de q.

Démonstration. Par bilinéarité et symétrie,

$$\begin{aligned} q(x+y) &= B(x+y, x+y) \\ &= B(x,x) + B(x,y) + B(y,x) + B(y,y) \\ &= q(x) + 2B(x,y) + q(y). \end{aligned}$$

Il suffit de réorganiser cette égalité. □

Exemple 2.15. Prenons $q(x,y) = x^2 + 4xy + 2y^2$. Sa forme polaire est

$$B((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 + 2(x_1y_2 + x_2y_1) + 2x_2y_2.$$

Sa matrice symétrique est donc

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.6 Rang et noyau d'une forme bilinéaire

Définition 2.16. Soit B une forme bilinéaire sur E. On appelle **radical** de B le sous-espace

$$\mathrm{Rad}(B) = \{x \in E\,;\ B(x,y) = 0 \text{ pour tout } y \in E\}.$$

La forme B est dite non dégénérée si son radical est réduit au vecteur nul.

Proposition 2.17. *Si M est la matrice de B dans une base de E, alors*

$$\mathrm{Rad}(B) = \mathrm{Ker}(M^{\mathsf{T}})$$

(en coordonnées). En particulier, si B est symétrique, le radical correspond à $\mathrm{Ker}(M)$.

Démonstration. Un vecteur de coordonnées X appartient au radical si et seulement si

$$X^{\mathsf{T}}MY = 0, \qquad \forall Y \in \mathbb{R}^n.$$

Cela équivaut à $X^{\mathsf{T}}M = 0$, donc à $M^{\mathsf{T}}X = 0$. □

Remarque 2.18. Pour une forme bilinéaire symétrique, la non-dégénérescence équivaut à l'inversibilité de sa matrice. En effet, cela revient à demander que $\mathrm{Ker}(M) = \{0\}$.

Exemple 2.19. Considérons

$$q(x,y) = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Sa matrice est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le rang de M est 1, et son noyau est engendré par $(-1,1)$. La forme quadratique est donc dégénérée.

2.7 Réduction d'une forme quadratique : méthode de Gauss

L'une des questions importantes est de savoir si l'on peut simplifier l'expression d'une forme quadratique par un changement de variables. La réponse est oui : sur $\mathbb{R}$, toute forme quadratique peut être écrite comme une somme de carrés de nouvelles variables, avec des coefficients réels.

Théorème 2.20. *Toute forme quadratique réelle peut être diagonalisée par un changement linéaire de variables. Autrement dit, pour toute forme quadratique q sur un espace de dimension finie, il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.*

La méthode de Gauss consiste à faire apparaître un carré parfait, puis à poursuivre le calcul sur les variables restantes.

Exemple 2.21. Considérons

$$q(x,y) = 2x^2 + 4xy + 3y^2.$$

On regroupe les deux premiers termes :

$$\begin{aligned} q(x,y) &= 2(x^2+2xy)+3y^2 \\ &= 2\big((x+y)^2-y^2\big)+3y^2 \\ &= 2(x+y)^2+y^2. \end{aligned}$$

En posant $X = x+y$ et $Y = y$, on obtient

$$q = 2X^2+Y^2.$$

La forme est donc diagonale dans la nouvelle base de coordonnées.

Exemple 2.22. Prenons maintenant

$$q(x,y,z) = x^2+2xy+2xz+2yz.$$

On commence par les termes contenant x :

$$q = (x+y+z)^2-(y+z)^2+2yz.$$

Or

$$-(y+z)^2+2yz = -y^2-z^2.$$

Ainsi,

$$q = (x+y+z)^2-y^2-z^2.$$

En choisissant les nouvelles variables $X = x+y+z$, $Y = y$ et $Z = z$, on obtient une forme diagonale.

Méthode 2.23 (Compléter le carré). Pour réduire une expression de la forme

$$ax^2+2bxy+cy^2, \qquad a \neq 0,$$

on écrit

$$ax^2+2bxy+cy^2 = a\left(x+\frac{b}{a}y\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{a}\right)y^2.$$

On poursuit ensuite la réduction avec les variables restantes. Si le coefficient de x^2 est nul, on peut permuter les variables ou effectuer un changement de variables simple afin de faire apparaître un terme carré.

2.7.1 Signature d'une forme quadratique

Après réduction, une forme quadratique réelle s'écrit, dans une certaine base,

$$q(x) = x_1^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-\cdots-x_{p+r}^2,$$

les autres variables n'apparaissant pas. Les nombres p et r ne dépendent pas du choix de la base.

Définition 2.24. On appelle **signature** de q le couple (p,r), où p est le nombre de carrés positifs et r le nombre de carrés négatifs dans une réduction diagonale. Le rang de q est $p+r$.

Théorème 2.25 (Loi d'inertie de Sylvester)**.** *Les nombres de coefficients strictement positifs et strictement négatifs dans une réduction diagonale d'une forme quadratique réelle ne dépendent pas du changement de base choisi. La signature est donc bien définie.*

Exemple 2.26. La forme

$$q(x,y) = x^2 - y^2$$

a pour signature $(1,1)$ et pour rang 2. La forme

$$q(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2$$

a pour signature $(2,0)$ et pour rang 2. La variable z n'intervient pas, ce qui explique que la forme est dégénérée sur $\mathbb{R}^3$.

2.8 Définitude

Définition 2.27. Une forme quadratique q sur E est dite :

- **positive** si $q(x) \geq 0$ pour tout $x \in E$;
- **positive définie** si $q(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$;
- **négative** si $q(x) \leq 0$ pour tout $x \in E$;
- **négative définie** si $q(x) < 0$ pour tout $x \neq 0$;
- **indéfinie** si elle prend des valeurs strictement positives et strictement négatives.

Exemple 2.28. La forme $q(x,y) = x^2 + 3y^2$ est positive définie. En revanche, $q(x,y) = x^2 - y^2$ est indéfinie puisqu'elle prend des valeurs positives pour $(1,0)$ et négatives pour $(0,1)$.

Proposition 2.29. *Une forme quadratique réelle est positive définie si et seulement si sa signature est* $(n,0)$*, où* $n = \dim E$.

Remarque 2.30. Pour une matrice symétrique réelle, la positivité définie peut aussi être étudiée à l'aide des valeurs propres : la forme $q(X) = X^{\mathsf{T}}MX$ est positive définie si et seulement si toutes les valeurs propres de M sont strictement positives. Cette caractérisation sera particulièrement utile lorsque nous parlerons des matrices symétriques.

2.9 Bilan et exercices

Les formes bilinéaires symétriques et les formes quadratiques sont très liées aux matrices symétriques. Le changement de base se traduit par une congruence $M' = P^{\mathsf{T}}MP$, et la méthode de Gauss permet de réduire la forme quadratique à une somme de carrés.

Exercice 2.31. Pour chacune des formes quadratiques suivantes, déterminer sa matrice dans la base canonique, son rang et sa signature :

$$\begin{aligned} q_1(x,y) &= x^2+4xy+5y^2, \\ q_2(x,y) &= x^2-4xy+4y^2, \\ q_3(x,y,z) &= x^2+y^2-z^2, \\ q_4(x,y,z) &= 2xy+2xz+2yz. \end{aligned}$$

Exercice 2.32. Soit B la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$B((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 3x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_1+2x_2y_2.$$

1. Donner la matrice de B dans la base canonique.
2. Vérifier que B est symétrique.
3. Déterminer la forme quadratique associée.
4. Réduire cette forme quadratique par la méthode de Gauss.
5. Déterminer si elle est positive définie.

Chapitre 3

Produit scalaire et orthogonalité

3.1 Introduction

Nous avons déjà rencontré le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Il permet de mesurer des longueurs et des angles et, par conséquent, de donner une interprétation géométrique aux calculs algébriques. Dans ce chapitre, nous allons généraliser cette notion à un espace vectoriel réel de dimension finie.

Le produit scalaire est un exemple particulier de forme bilinéaire symétrique. La différence importante est qu'il est positif défini. Cette propriété permet de définir une norme, puis la notion d'orthogonalité.

3.2 Produit scalaire

Définition 3.1. Un **produit scalaire** sur un espace vectoriel réel E est une forme bilinéaire symétrique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ qui est positive définie, c'est-à-dire qui vérifie :

(i) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ pour tous $x, y \in E$;

(ii) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$;

(iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$ et $\langle x, x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien. Lorsqu'il est de dimension finie, on parle souvent d'espace euclidien.

Exemple 3.2. Sur $\mathbb{R}^n$, l'application

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

est le produit scalaire canonique. En particulier, sur $\mathbb{R}^2$ on retrouve

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Exemple 3.3. Sur $\mathbb{R}^2$, considérons

$$\langle x, y \rangle = 2x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2.$$

La matrice associée est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Elle est symétrique et la forme quadratique associée vaut

$$q(x, y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2.$$

Plus simplement, on peut écrire

$$q(x,y) = x^2 + y^2 + (x+y)^2,$$

ce qui montre immédiatement que $q(x,y) > 0$ dès que $(x,y) \neq (0,0)$. Il s'agit donc d'un produit scalaire.

3.3 Norme associée à un produit scalaire

Définition 3.4. La norme associée au produit scalaire est l'application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}.$$

La norme permet de mesurer la longueur d'un vecteur. Dans $\mathbb{R}^2$, avec le produit scalaire canonique, on retrouve bien la formule habituelle

$$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Proposition 3.5 (Inégalité de Cauchy–Schwarz)**.** *Pour tous $x, y \in E$, on a*

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\| .$$

L'égalité a lieu si et seulement si x et y sont linéairement dépendants.

Démonstration. Si $y = 0$, le résultat est immédiat. Supposons donc $y \neq 0$. Pour tout réel t, la positivité du produit scalaire donne

$$0 \leq \|x - ty\|^2 = \|x\|^2 - 2t\langle x,y\rangle + t^2 \|y\|^2 .$$

Le polynôme du second degré en t est toujours positif. Son discriminant est donc inférieur ou égal à zéro :

$$4\langle x,y\rangle^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0.$$

On obtient l'inégalité annoncée. Le cas d'égalité correspond à un discriminant nul, ce qui signifie que $x - ty = 0$ pour une certaine valeur de t. Les deux vecteurs sont alors liés. □

Corollaire 3.6 (Inégalité triangulaire)**.** *Pour tous $x, y \in E$,*

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| .$$

Démonstration. On développe le carré de la norme :

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Les deux membres étant positifs, on peut prendre leurs racines carrées. □

3.4 Orthogonalité

Définition 3.7. Deux vecteurs $x, y \in E$ sont dits **orthogonaux** si

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

On note alors $x \perp y$.

Exemple 3.8. Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique, les vecteurs $(1,2)$ et $(2,-1)$ sont orthogonaux car

$$\langle (1,2), (2,-1) \rangle = 1 \times 2 + 2 \times (-1) = 0.$$

Définition 3.9. Une famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est dite orthogonale si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux. Elle est dite orthonormale si elle est orthogonale et si

$$\|e_i\| = 1, \qquad i = 1, \ldots, p.$$

Proposition 3.10. *Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.*

Démonstration. Supposons

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_p e_p = 0.$$

En prenant le produit scalaire avec e_j, on obtient

$$\alpha_j \left\| e_j \right\|^2 = 0,$$

car les autres produits scalaires sont nuls. Puisque $e_j \neq 0$, on a $\left\| e_j \right\|^2 > 0$, donc $\alpha_j = 0$. Cela est vrai pour tout j, et la famille est libre. □

Corollaire 3.11. *Dans un espace euclidien de dimension n, toute famille orthonormale de n vecteurs est une base orthonormale.*

3.5 Bases orthonormales et procédé de Gram–Schmidt

Il est souvent très utile de disposer d'une base orthonormale. Les calculs de coordonnées, de projection et de distance deviennent alors beaucoup plus simples.

Théorème 3.12. *Tout espace euclidien de dimension finie possède une base orthonormale.*

Démonstration. On part d'une base quelconque $(u_1, \ldots, u_n)$. On construit une famille orthogonale par récurrence. On pose $v_1 = u_1$, puis

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1.$$

On vérifie que v_2 est orthogonal à v_1. On poursuit de la même manière en posant

$$v_k = u_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle u_k, v_j \rangle}{\langle v_j, v_j \rangle} v_j.$$

La famille $(v_1,\dots,v_n)$ est orthogonale et, puisque chaque v_k s'obtient à partir de u_k en retranchant une combinaison des vecteurs précédents, elle est encore une base. Il suffit ensuite de normaliser chaque vecteur :

$$e_k = \frac{v_k}{\|v_k\|}.$$

On obtient une base orthonormale. □

Remarque 3.13. Le procédé décrit dans cette démonstration est appelé **procédé d'orthonormalisation de Gram–Schmidt**. Il ne change pas le sous-espace vectoriel engendré par les premiers vecteurs de la famille.

Exemple 3.14. Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique, partons de la base

$$u_1 = (1,1), \qquad u_2 = (1,0).$$

On pose

$$v_1 = u_1 = (1,1).$$

Ensuite,

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 = (1,0) - \frac{1}{2}(1,1) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

On peut remplacer v_2 par le vecteur proportionnel $(1,-1)$. Après normalisation, on obtient

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \qquad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1).$$

La famille (e_1,e_2) est une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$.

3.6 Orthogonal d'un sous-espace

Définition 3.15. Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle **orthogonal** de F le sous-espace

$$F^\perp = \{x \in E\,;\ \langle x, y\rangle = 0 \text{ pour tout } y \in F\}.$$

Proposition 3.16. *Si F est un sous-espace d'un espace euclidien E, alors*

$$E = F \oplus F^\perp \qquad \textit{et} \qquad \dim F + \dim F^\perp = \dim E.$$

Démonstration. On peut choisir une base orthonormale de F et la compléter en une base orthonormale de E. Les vecteurs ajoutés engendrent exactement $F^\perp$. La réunion des deux bases donne alors une décomposition en somme directe. □

Exemple 3.17. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, soit

$$F = \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0)).$$

Alors F est le plan d'équation $z = 0$ et

$$F^\perp = \mathrm{Vect}((0,0,1)).$$

On a bien $\dim F + \dim F^\perp = 2 + 1 = 3$.

3.7 Projection orthogonale et distance

La décomposition $E = F \oplus F^\perp$ permet d'écrire tout vecteur $x \in E$ de manière unique sous la forme

$$x = p_F(x) + r, \qquad p_F(x) \in F, \quad r \in F^\perp.$$

Le vecteur $p_F(x)$ est appelé projection orthogonale de x sur F.

Définition 3.18. L'application $p_F : E \to E$ qui associe à x sa composante dans F suivant la décomposition $E = F \oplus F^\perp$ est appelée **projection orthogonale sur** F.

Proposition 3.19. *Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormale de F, alors*

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Démonstration. Posons $y = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i$. Pour tout j, on a

$$\langle x - y, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle = 0.$$

Ainsi $x - y$ est orthogonal à F, tandis que $y \in F$. Par unicité de la décomposition, $y = p_F(x)$. □

Exemple 3.20. Dans $\mathbb{R}^3$, considérons le plan F engendré par

$$e_1 = (1,0,0), \qquad e_2 = (0,1,0).$$

Cette base est orthonormale. Pour $x = (a,b,c)$, la projection orthogonale sur F est

$$p_F(x) = \langle x, e_1 \rangle e_1 + \langle x, e_2 \rangle e_2 = (a,b,0).$$

Le vecteur restant $(0,0,c)$ appartient bien à $F^\perp$.

Théorème 3.21 (Théorème de projection)**.** *Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E. Pour tout $x \in E$, le vecteur $p_F(x)$ est l'unique élément de F qui minimise la distance à x. Autrement dit,*

$$\|x - p_F(x)\| \leq \|x - y\|, \qquad \forall y \in F.$$

Démonstration. On écrit $x = p_F(x) + r$ avec $r \in F^\perp$. Pour tout $y \in F$,

$$x - y = r + (p_F(x) - y).$$

Les deux vecteurs de cette somme sont orthogonaux. Le théorème de Pythagore donne

$$\|x - y\|^2 = \|r\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2 \geq \|r\|^2.$$

Or $\|r\| = \|x - p_F(x)\|$. L'égalité est obtenue uniquement lorsque $y = p_F(x)$. □

Définition 3.22. La distance d'un vecteur x à un sous-espace F est définie par

$$d(x,F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|.$$

Le théorème précédent montre que cette distance est atteinte en $p_F(x)$ et vaut

$$d(x,F) = \|x - p_F(x)\|.$$

3.8 Matrices de projection et de symétrie

Dans une base orthonormale adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^{\perp}$, la matrice de la projection orthogonale sur F est particulièrement simple :

$$P = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit les propriétés suivantes.

Proposition 3.23. *La matrice P d'une projection orthogonale vérifie*

$$P^2 = P, \qquad P^{\mathsf{T}} = P.$$

Réciproquement, une matrice réelle symétrique et idempotente représente une projection orthogonale pour le produit scalaire canonique.

Définition 3.24. La symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace F est l'endomorphisme qui laisse fixes les vecteurs de F et change en leur opposé les vecteurs de $F^{\perp}$. Sa matrice s'écrit

$$S = 2P - I.$$

Proposition 3.25. *La matrice d'une symétrie orthogonale vérifie*

$$S^2 = I, \qquad S^{\mathsf{T}} S = I.$$

Elle conserve donc le produit scalaire et la norme.

Exemple 3.26. Dans $\mathbb{R}^2$, la projection sur l'axe des abscisses est représentée par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La symétrie orthogonale par rapport à cet axe est représentée par

$$S = 2P - I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Elle transforme (x, y) en $(x, -y)$.

3.9 Matrices orthogonales et endomorphismes symétriques

Définition 3.27. Une matrice réelle Q est dite **orthogonale** si

$$Q^{\mathsf{T}} Q = Q Q^{\mathsf{T}} = I_n.$$

Ses colonnes forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 3.28. *Si Q est orthogonale, alors pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,*

$$\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle.$$

En particulier, $\|Qx\| = \|x\|$.

Démonstration. On utilise directement la définition :

$$\langle Qx, Qy\rangle = (Qx)^{\mathsf{T}}(Qy) = x^{\mathsf{T}}Q^{\mathsf{T}}Qy = x^{\mathsf{T}}y.$$

□

Définition 3.29. Un endomorphisme f d'un espace euclidien est dit **symétrique** si

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle, \qquad \forall x, y \in E.$$

Dans une base orthonormale, sa matrice est symétrique.

Théorème 3.30 (Théorème spectral)**.** *Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien de dimension finie est diagonalisable dans une base orthonormale. Autrement dit, sa matrice dans une base orthonormale est symétrique et il existe une matrice orthogonale Q telle que*

$$Q^{\mathsf{T}}AQ = D,$$

où D est diagonale.

Ce résultat est un lien important entre la réduction des endomorphismes et les formes quadratiques. Il affirme que les matrices symétriques réelles possèdent toujours des valeurs propres réelles et une base orthonormale de vecteurs propres.

Proposition 3.31. *Si A est une matrice symétrique réelle, alors deux vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.*

Démonstration. Soient u et v deux vecteurs propres associés respectivement à λ et μ, avec $\lambda \neq \mu$. La symétrie de A donne

$$\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle.$$

Or $Au = \lambda u$ et $Av = \mu v$. Par conséquent,

$$(\lambda - \mu)\langle u, v\rangle = 0.$$

Comme $\lambda \neq \mu$, on obtient $\langle u, v\rangle = 0$. □

Exemple 3.32. Considérons la matrice symétrique

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est

$$\chi_A(X) = (X-3)(X-1).$$

Un vecteur propre associé à 3 est $(1,1)$ et un vecteur propre associé à 1 est $(1,-1)$. Après normalisation, on obtient la base orthonormale

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \qquad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1).$$

La matrice de passage orthogonale est

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

et

$$Q^{\mathsf{T}}AQ = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.10 Quelques méthodes à retenir

Méthode 3.33 (Vérifier qu'une application est un produit scalaire). Pour une forme bilinéaire donnée par une matrice M dans la base canonique :

1. vérifier que M est symétrique ;
2. calculer la forme quadratique $q(X) = X^{\mathsf{T}}MX$;
3. vérifier que $q(X) > 0$ pour tout $X \neq 0$ (par réduction de Gauss, par les valeurs propres ou par un critère adapté).

Méthode 3.34 (Calculer une projection orthogonale). Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormale du sous-espace F, alors

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Si la base de F n'est pas orthonormale, on peut commencer par appliquer Gram–Schmidt, ou résoudre directement les conditions d'orthogonalité.

3.11 Exercices d'application

Exercice 3.35. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on considère

$$u = (1,1,0), \qquad v = (1,0,1), \qquad w = (0,1,1).$$

1. Calculer les produits scalaires deux à deux.
2. La famille (u,v,w) est-elle orthogonale ?
3. Construire une famille orthogonale à partir de (u,v,w) en utilisant Gram–Schmidt.
4. Normaliser les vecteurs obtenus.

Exercice 3.36. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le plan

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x+y+z = 0\}.$$

1. Déterminer une base de F.
2. Déterminer une base orthonormale de F.
3. Calculer la projection orthogonale de $(1,2,3)$ sur F.
4. En déduire la distance du point $(1,2,3)$ au plan F.

Exercice 3.37. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que A est symétrique.
2. Déterminer ses valeurs propres et des vecteurs propres associés.
3. Construire une base orthonormale de vecteurs propres.
4. Donner une matrice orthogonale Q telle que $Q^{\mathsf{T}}AQ$ soit diagonale.

Conclusion

Nous avons parcouru trois thèmes essentiels de l'algèbre linéaire. Le premier consiste à simplifier la représentation d'un endomorphisme en recherchant des vecteurs propres, puis en construisant une base adaptée. La diagonalisation est la situation la plus favorable ; lorsque cela n'est pas possible, la trigonalisation reste un outil utile. Le théorème de Cayley–Hamilton permet quant à lui de relier directement une matrice à son polynôme caractéristique.

Le deuxième thème introduit les formes bilinéaires symétriques et les formes quadratiques. Leur représentation matricielle permet de faire le lien avec les matrices symétriques, tandis que la méthode de Gauss donne une technique concrète pour réduire une forme quadratique.

Enfin, le produit scalaire apporte une structure géométrique à l'espace vectoriel. Il permet de définir la longueur, l'angle, l'orthogonalité et les projections. Le procédé de Gram–Schmidt fournit une méthode systématique pour construire des bases orthonormales, et le théorème spectral relie ces notions à la diagonalisation des matrices symétriques réelles.

Ces notions seront réutilisées dans plusieurs domaines, notamment l'analyse, les probabilités, les statistiques, l'optimisation et les méthodes numériques.