TD n°3 : Algèbre 3

AP2 (S3) - 2025/2026

Pr. Hamza El Mahjour

Exercice 1

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

b) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

[01]

Exercice 2

Soit q la forme définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$q(P) = 2P(1)P'(0), \quad \forall P \in \mathbb{R}_2[X].$$

1) Montrer que Q est une forme quadratique.
2) Écrire la matrice de Q dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3) Q est-elle positive ? Négative ? Définie ?
4) Déterminer une base (P_1, P_2, P_3) de $\mathbb{R}_2[X]$ telle que si $P = \sum_{i=1}^{3} a_i P_i$, alors
$$Q(P) = a_1^2 - a_2^2.$$
5) En déduire le rang et la signature de Q.

[02]

Exercice 3

Soit Q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$Q(x,y,z) = xy + yz + xz, \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

1) Donner la réduction de Gauss de q.
2) En déduire une base $\mathscr{B}$ Q-orthogonale de $\mathbb{R}^3$.
3) Écrire la matrice $Mat_{\mathscr{B}}(Q)$ de Q dans la base $\mathscr{B}$.
4) Q est-elle non dégénérée ? Positive ? Justifier vos réponses.

[03]

Exercice 4

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q(x,y,z) = (x-y+z)^2 - (x+z)^2 - y^2.$$

1) Montrer que l'expression donnée de q n'est **pas** la réduction de Gauss.
2) Écrire la matrice $Mat_{\mathscr{B}}(q)$ de q dans la base $\mathscr{B}$ et en déduire le rang de q.
3) Trouver la réduction de Gauss de q.
4) En déduire une base q-orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

[04]

Exercice 5

[05]