TD n°1 : Algèbre 3

AP2 (S3) - 2025/2026

Pr. Hamza El Mahjour

Exercice 1 Produit scalaire sur $\mathbb{K}[X]$

Les applications suivantes déterminent-elles des produits scalaires sur $E = \mathbb{R}[X]$?

1) $\varphi(P,Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$;
2) $\varphi(P,Q) = \int_0^1 (P(t)Q(t) + P'(t)Q'(t))\,dt$;

[01]

Exercice 2 Produit scalaire (forme quadratique ?)

Les applications définies par les formules suivantes déterminent-elles des produits scalaires sur $\mathbb{R}^3$?

1) $\varphi(u,u') = xx' + 2yy' + 4zz'$;
2) $\varphi(u,u') = xx' + 2xy' + 2x'y + yy' + 4zz'$;

où $u = (x,y,z)$ et $u' = (x',y',z')$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ [02]

Exercice 3 Carrés de formes linéaires et matrice de produit scalaire

1) En utilisant la méthode de Gauss, déterminer pour quelles valeurs de a la forme $\varphi(u,u') = xx' + 6yy' + azz' - 2x'y - 2xy' - 3xz' - 3x'z$ définit un produit scalaire.
2) Donner la matrice Φ de φ pour $a = 28$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$; déterminer une base dans laquelle la matrice Φ' de φ soit diagonale et donner une relation entre les deux matrices de φ.

[03]

Exercice 4 Familles orthogonales

1) Montrer que, pour tout entier n, les fonctions $c_k : x \mapsto \cos kx$, $0 \leqslant k \leqslant n$ et $s_k : x \mapsto \sin kx$, $1 \leqslant k \leqslant n$ forment une famille libre de $\mathscr{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$.
2) Montrer que, pour tout entier n, les fonctions $e_k : x \mapsto e^{ikx}$, $-n \leqslant k \leqslant n$ forment une famille libre de $\mathscr{C}([0,2\pi],\mathbb{C})$.

[04]

Exercice 5 Quand la théorie dépasse la technique

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} k\sqrt{k} \leqslant n(n+1)\frac{\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$$

[05]

Exercice 6 Gram-Schmidt

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Schmidt la base $u = (1,0,1)$, $v = (1,1,1)$, $w = (-1,-1,0)$.