Devoir Maison
Module : Algèbre 3
AP2 (ENSAT)

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré au plus 2.

Exercice 1.

1. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \Phi : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) &\longmapsto P(1)Q(-1) \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire. Écrire la matrice de Φ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.

2. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \Psi : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) &\longmapsto \int_0^1 P(x)Q(x)\,dx \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire. Écrire la matrice de Ψ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.

Exercice 2. Montrer que toute forme bilinéaire sur l'espace vectoriel K est de la forme

$$(x, y) \longmapsto \lambda xy \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Exercice 4. Soit E l'espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients réels. On considère l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(A, B) = \det(A + B) - \det(A - B).$$

Montrer que Φ est une forme bilinéaire, puis calculer sa matrice relativement à la base canonique de E.

Exercice 5. Montrer que chacune des applications suivantes est une forme bilinéaire, calculer leur matrice dans la base canonique et leur noyau à gauche.

1. $n = 2$ et $\phi(x, y) = x_1y_1 - 2x_2y_2$.
2. $n = 3$ et $\phi(x, y) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_2 - 2x_2y_3 - x_3y_1 - 2x_3y_3$.
3. $n = 3$ et $\phi(x, y) = 2x_1y_1 - 3x_2y_2 - x_3y_3$.

Exercice 6. Sur $\mathbb{R}^3$, on définit l'application suivante

$$\Phi(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + \frac{1}{2}x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 - 3y_2x_3 - 3x_2y_3$$

où $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Démontrer que Φ est une forme bilinéaire symétrique sur E.
2. La forme Φ est-elle dégénérée ?
3. Soit H_1 le plan d'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Déterminer l'orthogonal $H_1^\perp$ de H_1 respectivement à Φ.
4. Soit H_2 le plan d'équation $2x_2+x_3 = 0$. Déterminer l'orthogonal $H_2^\perp$ de H_2 respectivement à Φ.