Algèbre 2 - SMI/SMA - S1

Polynômes de $\mathbb{K}[X]$ - Séance 04

Pr. Hamza El Mahjour

Faculté
Polydisciplinaire
Larache
Université Abdelmalek Essaâdi

Objectifs principaux

- Comparer deux polynômes (cas d'égalité)

Objectifs principaux

- Comparer deux polynômes (cas d'égalité)

- Résoudre l'équation $z^n = a$ dans $\mathbb{C}$

Objectifs principaux

- Comparer deux polynômes (cas d'égalité)

- Résoudre l'équation $z^n = a$ dans $\mathbb{C}$

- Appliquer l'algorithme d'Euclide pour des polynômes

Objectifs principaux

- Comparer deux polynômes (cas d'égalité)

- Résoudre l'équation $z^n = a$ dans $\mathbb{C}$

- Appliquer l'algorithme d'Euclide pour des polynômes

- Discuter sur la méthode de Newton

Égalité entre deux polynômes

Égalité des polynômes

Définition

Deux polynômes $P(X) = \sum_i a_i X^i$ et $P(X) = \sum_i b_i X^i$ sont égaux si et seulement si $a_i = b_i$ pour tout i.

On déduit de la définition précédente que si deux polynômes sont égaux alors ils sont de même degré !

Exemple

Soit $P(X) = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ et $Q(X) = -\frac{1}{2} + 5X^2$. Supposons que $P = Q$, alors

$$\begin{aligned} a_0 &= \\ a_1 &= \\ a_2 &= \\ a_3 &= \end{aligned}$$

Exemple

Soit $P(X) = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ et $Q(X) = -\frac{1}{2} + 5X^2$. Supposons que $P = Q$, alors

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{1}{2} \\ a_1 &= \\ a_2 &= \\ a_3 &= \end{aligned}$$

Exemple

Soit $P(X) = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ et $Q(X) = -\frac{1}{2} + 5X^2$. Supposons que $P = Q$, alors

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{1}{2} \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= \\ a_3 &= \end{aligned}$$

Exemple

Soit $P(X) = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ et $Q(X) = -\frac{1}{2} + 5X^2$. Supposons que $P = Q$, alors

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{1}{2} \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= 5 \\ a_3 &= \end{aligned}$$

Exemple

Soit $P(X) = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ et $Q(X) = -\frac{1}{2} + 5X^2$. Supposons que $P = Q$, alors

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{1}{2} \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= 5 \\ a_3 &= 0 \end{aligned}$$

Exemple

Soit $P(X) = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ et $Q(X) = -\frac{1}{2} + 5X^2$. Supposons que $P = Q$, alors

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{1}{2} \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= 5 \\ a_3 &= 0 \end{aligned}$$

Quel est le degré du polynôme P ?

Exemple

Soit $P(X) = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ et $Q(X) = -\frac{1}{2} + 5X^2$. Supposons que $P = Q$, alors

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{1}{2} \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= 5 \\ a_3 &= 0 \end{aligned}$$

Quel est le degré du polynôme P ?

$\deg P = \deg Q = 2$.

Racines n-èmes d'un nombre complexe

On rappelle que

On rappelle que

$$r\, e^{i\theta} = r'\, e^{i\theta'} \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta \equiv \theta' \; [2\pi] \; ; \end{cases}$$

On rappelle que

$$r\,e^{i\theta} = r'\,e^{i\theta'} \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta \equiv \theta' \ [2\pi] \ ; \end{cases}$$

Il s'agit de résoudre l'équation $z^n = Z$ avec $z \in \mathbb{C}$

On rappelle que

$$r\,e^{i\theta} = r'\,e^{i\theta'} \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta \equiv \theta' \ [2\pi] \end{cases} ;$$

Il s'agit de résoudre l'équation $z^n = Z$ avec $z \in \mathbb{C}$

$$z^n = Z \Leftrightarrow r^n\,e^{in\alpha} = R\,e^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = R \\ n\alpha \equiv \theta \ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = R^{\frac{1}{n}} \\ \alpha \equiv \dfrac{\theta}{n} \ \left[\dfrac{2\pi}{n}\right] \end{cases}$$

Ce qui donne l'ensemble des solutions suivantes

Ce qui donne l'ensemble des solutions suivantes

$$\forall\, k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad z_k := R^{\frac{1}{n}}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}.$$

Ce qui donne l'ensemble des solutions suivantes

$$\forall\, k \in \{0,\ldots,n-1\}, \quad z_k := R^{\frac{1}{n}}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}.$$

Le cas pariculier de ces solutions est $z^n = 1$.
On parle alors des racines $n-$èmes de l'unité.

Ce qui donne l'ensemble des solutions suivantes

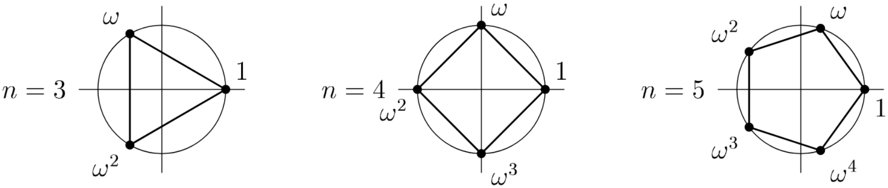
$$\forall\, k \in \{0, \ldots, n-1\}, \quad z_k := R^{\frac{1}{n}}\, e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}.$$

Le cas pariculier de ces solutions est $z^n = 1$.
On parle alors des racines $n-$èmes de l'unité.

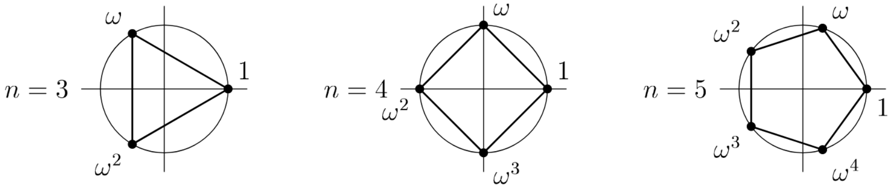
$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \{0, \ldots, n-1\} \right\}.$$

L'interprétation géométrique

L'interprétation géométrique



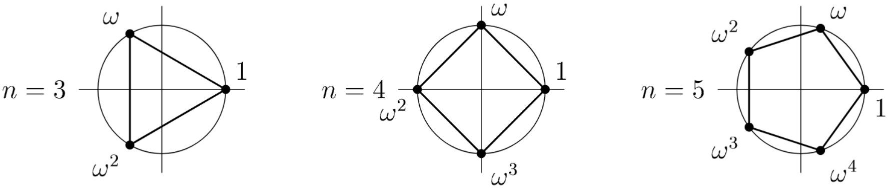
L'interprétation géométrique



Proposition

$(\mathbb{U}_n, \times)$ *est le seul sous-groupe multiplicatif de* $(\mathbb{C}^*, \times)$ *d'ordre n. De plus, il est isomorphe à* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

L'interprétation géométrique



Proposition

$(\mathbb{U}_n, \times)$ *est le seul sous-groupe multiplicatif de* $(\mathbb{C}^*, \times)$ *d'ordre n. De plus, il est isomorphe à* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

Étudiez

$$\begin{array}{rcl} f : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) & \longrightarrow & (\mathbb{U}_n, \cdot) \\ \overline{k} & \longmapsto & e^{i\frac{2k\pi}{n}}. \end{array}$$

On a déjà vu l'algorithme d'Euclide pour le PGCD de deux nombres entiers.

On a déjà vu l'algorithme d'Euclide pour le PGCD de deux nombres entiers.

On peut faire la même chose pour des polynômes !

On a déjà vu l'algorithme d'Euclide pour le PGCD de deux nombres entiers.

On peut faire la même chose pour des polynômes !

Deux polynômes P et Q sont considérés "le même à un facteur multiplicatif près" si $P = \alpha Q$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$

On a déjà vu l'algorithme d'Euclide pour le PGCD de deux nombres entiers.

On peut faire la même chose pour des polynômes !

> Deux polynômes P et Q sont considérés "le même à un facteur multiplicatif près" si $P = \alpha Q$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$

Par exemple $A(X) = 3X - 6$ est le même que $B(X) = X - 2$ car $A(X) = 3B(X)$.

Comprenons par la pratique !

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
X^5 & -2X^4 & +X^3 & -X^2 & +2X & -1 & X^3-X^2+2X-2 \\ \cline{7-7}
-X^5 & +X^4 & -2X^3 & +2X^2 & & & X^2-X-2 \\ \cline{1-6}
 & -X^4 & -X^3 & +X^2 & +2X & -1 & \\
 & +X^4 & -X^3 & +2X^2 & -2X & & \\ \cline{2-6}
 & & -2X^3 & +3X^2 & & -1 & \\
 & & +2X^3 & -2X^2 & +4X & -4 & \\ \cline{3-6}
 & & & X^2 & +4X & -5 &
\end{array}
$$

Comprenons par la pratique !

$$
\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & -\ X^2 + & 2X - & 2 & X^2+4X-5 \\
\cline{5-5}
-X^3 & -4X^2 + & 5X & & X-5 \\
\cline{1-4}
 & -5X^2 + & 7X - & 2 & \\
 & +5X^2 + & 20X - & 25 & \\
\cline{2-4}
 & & 27X - & 27 &
\end{array}
$$

Comprenons par la pratique !

$$
\begin{array}{rrr|l}
X^2 & +4X & -5 & X-1 \\ \cline{4-4}
-X^2 & +\ X & & X+5 \\ \cline{1-3}
 & 5X & -5 & \\
 & -5X & -5 & \\ \cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}
$$

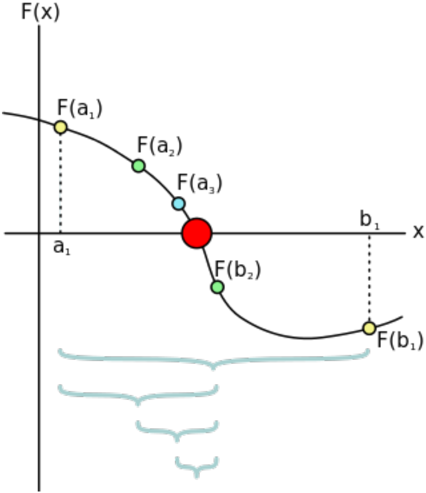
Comprenons par la pratique !

$$
\begin{array}{rrr|l}
X^2 & +4X & -5 & X-1 \\
\cline{4-4}
-X^2 & +\ X & & X+5 \\
\cline{1-3}
 & 5X & -5 & \\
 & -5X & -5 & \\
\cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}
$$

Donc, "**le**" PGCD de $X^5 - 2X4 + X^3 - X^2 + 2X - 1$ et $X^3 - X^2 + 2X - 2$ est le dernier reste non nul, c'est à dire $27(X - 1)$.

Méthode de Dichotomie et de Newton

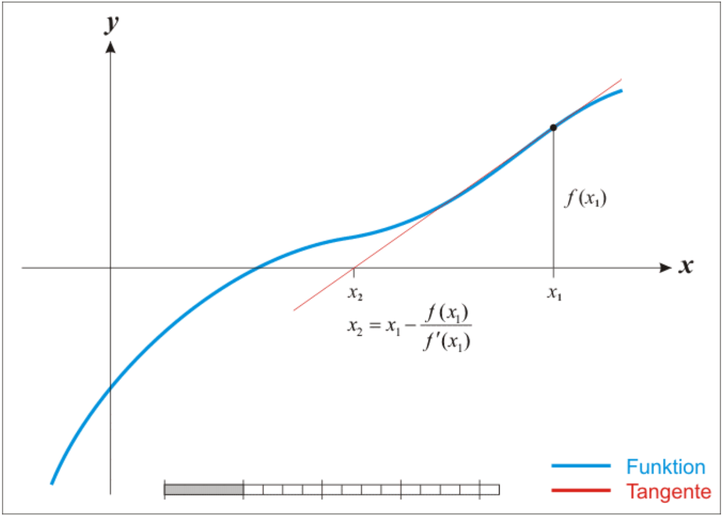
Dichotomie



Algorithme 1

```
Tant que (b - a) > ε
    m ← (a + b) / 2
    Si (f(a)*f(m) ≤ 0) alors
        b ← m
    sinon
        a ← m
    Fin Si
Fin Tant que
```

Newton-Raphson



Algorithme 2

Formellement, on part d'un point x_0 appartenant à l'ensemble de définition de la fonction et on construit par récurrence la suite :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

où f' désigne la dérivée de la fonction f. Le point x_{k+1} est bien la solution de l'équation affine $f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) = 0$.

Il se peut que la récurrence doive se terminer, si à l'étape k, x_k n'appartient pas au domaine de définition ou si la dérivée $f'(x_k)$ est nulle ; dans ces cas, la méthode échoue.

source : wikipédia.