Algèbre 2 - SMP - S1

Séquence 03 : Propriétés d'un polynôme

Pr. Hamza El Mahjour

Faculté
Polydisciplinaire
Larache
Université Abdelmalek Essaâdi

Objectif principal

Connaître les notions principales sur un polynôme

Introduction

Construction

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, 0, \ldots)$$

Suites nuls à partir d'un certain rang

Notation sommative

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n$$

où $a_i \in \mathbb{K}$.

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$$

Exemples

$$P(x) = 1 + X^2,$$

$$Q(X) = -X^3 + 2X^2 + 5.$$

Définition

Le degré d'un polynôme est la plus grande puissance n de X multiplié par un coefficient non nul. On note $\deg P = n$.

$\deg(X^2 + 1) =$

Exemples

$$P(x) = 1 + X^2,$$

$$Q(X) = -X^3 + 2X^2 + 5.$$

Définition

Le degré d'un polynôme est la plus grande puissance n de X multiplié par un coefficient non nul. On note $\deg P = n$.

$\deg(X^2 + 1) = 2$

Exemples

$$P(x) = 1 + X^2,$$

$$Q(X) = -X^3 + 2X^2 + 5.$$

Définition

Le degré d'un polynôme est la plus grande puissance n de X multiplié par un coefficient non nul. On note $\deg P = n$.

$\deg(X^2 + 1) = 2$ et $\deg(0 \cdot X^{15} + X^2 - 3X^5) =$

Exemples

$$P(x) = 1 + X^2,$$

$$Q(X) = -X^3 + 2X^2 + 5.$$

Définition

Le degré d'un polynôme est la plus grande puissance n de X multiplié par un coefficient non nul. On note $\deg P = n$.

$\deg(X^2 + 1) = 2$ et $\deg(0 \cdot X^{15} + X^2 - 3X^5) = 5$.

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes de degré quelconque.

On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré $\leq n$

Clairement pour $m \leq n$

$$\mathbb{K}_m[X] \subset \mathbb{K}_n[X] \subset \mathbb{K}[X]$$

Propriétés

Addition

Proposition

*La somme de deux polynômes se fait "**coefficient par coefficient**".*
Soient $P(X) = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$ *et* $Q(X) = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$ *alors*

$$(P+Q)(X) = \sum_{i \geq 0} (a_i + b_i) X^i.$$

Exemple

- $A(X) = 4X^3 - X^2 - 1$ et $B(X) = 15X^4 - 4X^3 + 5X$ alors $(A+B)(X) = 15X^4 - X^2 + 5X - 1$.
- $A(X) = -X^2 + 3X + 1$ et $B(X) = X^2 + 5X$ alors $(A+B)(X) = 8X + 1$.

Multiplication

Multiplier par un scalaire α.

$$(\alpha P)(X) = \sum_{i=0}^{n} \alpha a_i X^i$$

Multiplier deux polynômes

$$(P \cdot Q)(X) = P(X) \cdot Q(X)$$

Prenons un exemple pour comprendre

$$A(X) = 1 + 3X - X^2, B(X) = 3 - 2X^2 + 5X^3$$

Utilisons la distributivité de la multiplication !

$$(A \cdot B)(X) = (1 + 3X - X^2) \cdot (3 - 2X^2 + 5X^3)$$

$$
\begin{aligned}
(AB)(X) &= \underbrace{1\cdot 3}_{c_0} + \underbrace{(1\cdot 0 + 3\cdot 3)}_{c_1} X + \underbrace{(3\cdot 0 - 1\cdot 3 + 1\cdot(-2))}_{c_2} X^2 \\
&\quad + \underbrace{(1\cdot 5 + 3\cdot(-2) + (-1)\cdot 0 + 0\cdot 3)}_{c_3} X^3 + \underbrace{(3\cdot 5 + (-1)\cdot(-}_{c_4} \\
&\quad + \underbrace{((-1)\cdot 5 + 0\cdot(-2))}_{c_5} X^5, \\
&= 3 + 9X - 5X^2 - X^3 + 17X^4 - 5X^5.
\end{aligned}
$$

Degrés

Soient $\deg P = m$ et $\deg Q = n$ alors

$$\deg(P+Q) \leq \max(m,n)$$

$$\deg(P \cdot Q) \leq \deg P + \deg Q)$$

Structures Algébriques avec $\mathbb{K}[X]$

$(\mathbb{K}[X], +)$ est un groupe commutatif.

$(\mathbb{K}[X], \times)$ est un **magma**.

$(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau.

$(\mathbb{K}[X], +, .)$ est un espace vectoriel.