Algèbre 2 - SMI/SMA - S1

Fractions rationelles - Séance 05

Pr. Hamza El Mahjour

Faculté
Polydisciplinaire
Larache
Université Abdelmalek Essaâdi

Objectifs principaux

- Comment est construit $\mathbb{Q}$?

Objectifs principaux

- Comment est construit $\mathbb{Q}$?

- Peut-on faire la même chose avec $\mathbb{K}[X]$?

Objectifs principaux

- Comment est construit $\mathbb{Q}$?

- Peut-on faire la même chose avec $\mathbb{K}[X]$?

- Comment manipuler des fractions rationnelles ?

Fractions rationnelles

Les fractions de l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ sont définies par une **relation** comme suit

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \times d = b \times c,$$

où $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ et $(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.
Pour des polynômes (A, B) et (C, D) dans $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$, on définit de même que dans $\mathbb{Q}$ une **relation**

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \iff A \cdot D = B \cdot C.$$

En injectant cette **relation** dans $\mathbb{K}[X]$, nous obtenons un ensemble noté $\mathbb{K}(X)$ et nommé l'ensemble des **fractions rationnelles.** Une fraction rationnelle est un élément $\frac{A}{B}$ de $\mathbb{K}(X)$ où $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X]^*$.

En effet,

Proposition

Soit $(A(X), B(X))$ *et* $(C(X), D(X))$ *dans* $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$. *La relation* $\equiv$ *définie sur* $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ *par*

$$(A, B) \equiv (C, D) \ si \ \ A \cdot D = B \cdot C$$

est une relation d'équivalence.

Preuve

1. (Réfl.) On a $(A, B) \equiv (A, B)$ car $AB = AB$.
2. (Sym.) Soit $(A, B) \equiv (C, D)$ alors $AD = BC$ donc, par commutativité, $CB = DA$ alors $(C, D) \equiv (A, B)$
3. (Tran.) Si$(A, B) \equiv (C, D)$ et $(C, D) \equiv (E, F)$ alors $AD = BC$ et $CF = DE$ alors $ADF = B\underbrace{CF}_{=DE}$ donc $ADF = BDE$. Puisque $\mathbb{K}[X]$ est un anneau commutatif alors $AFD = BED$. Donc, $AFD - BED = 0_{\mathbb{K}[X]}$ (car $-BED$ est l'opposé de BED). Et parce que $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau alors $(AF - BE)D = 0_{\mathbb{K}[X]}$. Ce qui implique que $AF - BE = 0_{\mathbb{K}[X]}$ ou bien $D = 0_{\mathbb{K}[X]}$ (car $\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre). Mais $D \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ donc forcément $AF - BE = 0_{\mathbb{K}[X]} \implies AF = BE$

Donc $\equiv$ est bien une relation d'équivalence.

À partir de la relation d'équivalence précédente, on peut créer un anneau quotient $\mathbb{K}[X]/\equiv$. Où les éléments de cet anneau seront des classes d'équivalence. Ceci est une pratique que vous connaissez implicitement avec l'ensemble $\mathbb{Q}$.

$$\frac{50}{100} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} = \frac{20}{40} = \dots$$

Ces fractions sont équivalentes bien que leur écriture est différente. On appelle ces nombres des **représentants**.

Définition

$\mathbb{K}[X]/\equiv$ est appelée l'ensemble des fractions rationnelles et est noté $\mathbb{K}(X)$. On a

$$\mathbb{K}(X) = \left\{ \frac{A}{B}, \qquad A \in \mathbb{K}[X], B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\} \right\}$$

On peut munir $\mathbb{K}(X)$ de lois de compositions interne. Notamment une addition et une multiplication. Afin de former un anneau.

Définition

- Soit $\frac{A}{B}, \frac{C}{D} \in \mathbb{K}(X)$ on définit la somme des deux fractions par

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD}.$$

- Le produit des deux fractions est

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{A \times C}{B \times D}.$$

Exemple

$$\frac{1}{X^2} + \frac{X}{X-1} = \frac{1(X-1) + X^2X}{X^2(X-1)} = \frac{X - 1 + X^3}{X^2(X-1)}$$

Si on muni $\mathbb{K}(X)$ des deux lois précédentes on obtient un anneau $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ d'élément neutre pour l'addition $\frac{0_{\mathbb{K}[X]}}{1_{\mathbb{K}[X]}}$ noté 0. L'élément neutre de la multiplication est $\frac{1_{\mathbb{K}[X]}}{1_{\mathbb{K}[X]}}$ noté 1. De plus

Proposition

$(\mathbb{K}(X), +, \times)$ *est un corps !*

Propriétés

Soient $A(X), B(X)$ deux éléments non-nuls de $\mathbb{K}[X]$. Alors

- L'élément $\frac{A(X)}{1}$ de $\mathbb{K}(X)$ coïncide avec $A(X)$ de $\mathbb{K}[X]$.
- L'inverse de $\frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ est $\frac{B}{A}$.
- $\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}(X)$ car $A = \dfrac{A}{1}$.

Définition

Un représentant $\frac{A}{B}$ est irréductible ssi A et B sont premiers entre eux.

Exemples

- $\frac{X^3-2X^2+2X-4}{X^4-2X^3+iX-2i}$ n'est pas irréductible car $\frac{X^3-2X^2+2X-4}{X^4-2X^3+iX-2i} = \frac{(X^2+2)(X-2)}{(X^3+i)(X-2)}$. Donc $X-2$ est un diviseur commun de A et B.
- $\frac{X-11}{X+17i}$ est irréductible car les seuls diviseurs communs de $X-11$ et $X+17i$ sont les polynômes constants.

Définition

On dit que α_0 est un **pôle** de la fraction $\frac{A}{B}$ s'il est une racine du polynôme B (i.e si $B(\alpha_0) = 0$). Le pôle est d'ordre n si la racine est de multiplicité n.

Soit le résultat de la division euclidienne de A par B tel que :
$A = BQ + R$. On peut constater que en multipliant par $\frac{1}{B}$ on obtient

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B},$$

avec $\deg R < \deg B$. Dans ce cas, on appelle Q la **Partie Entière** de $\frac{A}{B}$.

Exemple :

$$\frac{2X^4 + 3X^3 - X + 1}{X^2 - 3X + 1} = 2X^2+9X+25+\frac{65X - 24}{X^2 - 3X + 1}$$

Nous avons maintenant besoin d'un cadre plus général que le résultat précédent.

Théorème

Soient A, B, B_1, B_2 des polynômes tels que :

- la fraction rationnelle est de partie entière nulle,
- B_1 et B_2 sont premiers entre eux et $B = B_1 B_2$.

Alors il existe des polynômes uniques A_1 et A_2 tels que

$$\frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2}$$

avec $\deg(A_1) < \deg(B_1)$ et $\deg(A_2) < \deg(B_2)$.
Si de plus $\frac{A}{B}$ est irréductible, alors les deux fractions $\frac{A_1}{B_1}$ et $\frac{A_2}{B_2}$ sont irréductibles.

Exemples :

$$\frac{6X^3 - 21X^2 + 9X - 21}{(X-1)^3(X^2+X+1)} = \frac{-2X^2 + 8X - 15}{(X-1)^3} + \frac{2X+6}{X^2+X+1}$$

$$\frac{10x^2 + 12x + 20}{x^3 - 8} = \frac{7}{x-2} + \frac{3x+4}{x^2+2x+4}.$$

$$\frac{25}{(x+2)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x+2} + \frac{-x+2}{x^2+1} + \frac{-5x+10}{(x^2+1)^2}$$

Afin d'éviter l'énonciation de plusieurs théorèmes il est important d'avoir une idée sur la pratique de la décomposition en éléments simples. On choisit pour cet objectif de travailler sur $\mathbb{C}[X]$. En général, on peut écrire tout polynôme B de $\mathbb{C}[X]$ de la forme

$$B = k(X-\alpha_1)^{p_{\alpha_1}}(X-\alpha_2)p_{\alpha_2}(X-\alpha_3)^{p_{\alpha_3}}\dots(X-\alpha_m)^{p_{\alpha m}}$$

où chaque α_i est une racine distincte et p_{α_i} sa multiplicité. On a alors la décomposition suivante

$$\begin{aligned}\frac{A}{B} \quad = \quad & E + \frac{A_{\alpha_{11}}}{X-\alpha_1} + \frac{A_{\alpha_{12}}}{(X-\alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_{\alpha_{1p_{\alpha_1}}}}{(X-\alpha_1)^{p_{\alpha_1}}} + \dots \\ & + \frac{A_{\alpha_{21}}}{X-\alpha_2} + \frac{A_{\alpha_{22}}}{(X-\alpha_2)^2} + \dots + \frac{A_{\alpha_{2p_{\alpha_1}}}}{(X-\alpha_2)^{p_{\alpha_2}}} + \dots \\ & + \frac{A_{\alpha_{m1}}}{X-\alpha_m} + \frac{A_{\alpha_{m2}}}{(X-\alpha_m)^2} + \dots + \frac{A_{\alpha_{mp_{\alpha m}}}}{(X-\alpha_m)^{p_{\alpha m}}}\end{aligned}$$

Références

- Gourdon, X.
  « Algèbre, Maths en tête ».
  ellipses, 1994.
- R. A. Earl.
  « Complex Numbers ».
  University of Oxford, Mathematical Institute,2015/2016.
- J.-B.Hiriart-Urruty
  « Les nombres complexes de A à Z ».
  Université de Toulouse,2009.
- Jean-Pierre Escofier
  « Toute l’algèbre de la licence ».
  Édition Dunod,2020.