Université Abdelmalek Essaâdi - Faculté Polydisciplinaire de Larache
Contrôle Final (Session Normale) Durée : 1h30
1ère année de Licence : SMP
Module : Algèbre I - Pr. Hamza El Mahjour

1. **(3 pts) (questions de cours)**

   1. Soit E un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel F fini avec $\dim F = 4$. Que peut on dire de la dimension de E ?
   2. Soit U et V deux sous-espaces vectoriels. Énoncer sans justifier lequel des ensembles suivants est toujours un sous-espace vectoriel : $U \cap V$ ou bien $U \cup V$?
   3. Citez, sans justifier, les dimensions des espaces $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$ et $(\mathbb{R}_n[X], +, \cdot)$

2. **(4 pts) (Sous-espace vectoriel)**
   Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad 3x - y + 2z = 0\} \subset \mathbb{R}^2$.
   1. Montrer que E est un ensemble non-vide.
   2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

3. **(8 pts) (Bases, repères et coordonnées)**
   Soit $\mathcal{F} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
   1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.
   2. Soit $O(0, 0, 0)$ un point de l'espace euclidien de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{R}_O = \left(O, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ le repère canonique.

      On considère le repère formé de O et de $\mathcal{F}$ c-à-d $\mathcal{R} = \left(O, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Trouvez les deux matrices de passage de $\mathcal{R}_O$ vers $\mathcal{R}$ et de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}_O$.
   3. Soit B le point de coordonnées $(1, 3, 0)$ dans le repère canonique. Donnez ces coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$.
   4. Le point $C(1, -\sqrt{3}, 0)$ est donné en coordonnées cartésiennes. Calculer ses coordonnées cylindriques.

4. **(5 pts)** (**Polynômes et nombres complexes**)
   On considère le polynôme $P(X) = X^4 + 2$ dans $\mathbb{R}[X]$.
   1. Le polynôme P est-il irréductible dans $\mathbb{R}[X]$? Pourquoi ?
   2. Trouvez les racines de P dans $\mathbb{C}$ et représenter les graphiquement.
   3. Écrire P comme produit de deux polynômes irréductible de $\mathbb{R}[X]$.