Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté Polydisciplinaire
de Larache
Année 2024-2025

Algèbre I
Durée : 1 h 30
Session Normale

Nom : ______________________
Prénom : ______________________
N°Ins : IA ______________________
Table n° : ______ **Salle :** ______

CALCULATRICE NON AUTORISÉE ______________________ Lundi 23 décembre 2024

1. (4½ points) Soit $G = (\mathbb{R}^*, \times)$ et soit $H = \{a + b\sqrt{2} : \quad a, b \in \mathbb{Q}, \quad (a,b) \neq (0,0)\}$.
   (a) Montrer que H est non-vide et que $H \subset G$.
   (b) Montrer que H est un sous-groupe de G.

2. (3½ points) Soit $P(X) = X^5 - 2X^4 + X^3 - X^2 + 2X - 1$ et $Q(X) = X^3 - X^2 + 2X - 2$.

   En appliquant l'algorithme d'Euclide, trouver $D(X)$ le PGCD de P et Q dans $\mathbb{R}[X]$.

3. (3 points) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{X^4 - 4X^3 + 2X - 1}{X^2 - 3}$$

4. (6 points) Les deux questions suivantes sont liées.
   (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = -1$ et écrire les trois racines trouvées ω_0, ω_1 et ω_3 sous la forme algébrique.
   (b) Utiliser le résultat précédent pour la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ de la fraction :

$$\frac{-1}{X^3 + 1}.$$

5. (3 points) Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ telle que : $f(x, y) = (x + y, xy)$. Étudier l'injectivité et la surjectivité de cette application.