Module : Algèbre II   Filière : SMIA

Groupe 2

Faculté Polydisciplinaire Larache - Université Abdelmalek Essaâdi

Durée : 1h00

Session: Normale 2021/2022 - Contrôle Final (Semestre 1)

Pr. Hamza El Mahjour

1. Chaque exercice peut être résolu indépendamment de l'autre.
2. Toutes les réponses doivent être **justifiées** et avec des **calculs détaillés**.

Bon courage !

- **Exercice 1:** (5 pts)
Répondez (**en justifiant**) si les assertions suivantes sont **vraies** ou **fausses**:

  (a) La multiplication "$\times$" est une loi de composition interne pour l'ensemble $E = \{-1, 0, 1\}$.

  (b) L'addition "$+$" est une loi de composition interne pour l'ensemble $E = \{-1, 0, 1\}$.

  (c) Le polynôme $5X^2 - X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{C}[X]$.

  (d) Le polynôme $5X^2 - X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

  (e) L'anneau $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}, +, \times)$ est un corps.

- **Exercice 2:** (4 pts)
Soit $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}, \quad z^5 = 1\}$.

  (a) Montrer que $\big(\mathcal{U}, \times\big)$ est un sous-groupe de $\big(\mathbb{C}^*, \times\big)$.

  (b) Trouver tous les éléments de l'ensemble $\mathcal{U}$.

- **Exercice 3:** (8 pts)

  (a) Trouver le P.G.C.D des polynômes $2X^4 - X^3 + 4X - 2$ et $2X^3 + X^2 + X - 1$.

  (b) Donner le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifie :
$$P(1) = -1, P'(1) = 0, P^{(2)}(1) = P^{(3)}(1) = 6 \text{ et } P^{(n)}(1) = 0 \text{ pour } n > 3.$$

  (c) Trouver tous les polynômes vérifiant $4P = (P')^2$.

  (d) Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ puis dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction $\dfrac{2}{X^3 - 1}$.

- **Exercice 4:** (3 pts)
Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini multiplicatif. On notera $(S(G), \circ)$ le groupe des permutations des éléments de G.

  – Montrer que l'application $f_z : \begin{array}{l} G \longrightarrow G \\ x \longmapsto zx \end{array}$ est une bijection.

  – En déduire que $f_z \in (S(G), \circ)$ pour tout z de G.

  – Démontrer que
$$\varphi : \begin{array}{rcl} (G, \cdot) & \longrightarrow & (S(G), \circ) \\ z & \longmapsto & f_z \end{array}$$
  est un morphisme injectif de groupes.